数理解析研究所講究録
第752巻 1991年 113-122

Positive definite quadratic lattices with trivial automorphism groups

福工大非常勤講師 坂内 悦子 (Etsuko Bannai)

準備

Wを有理数体$\mathbb{Q}$上のm次元quadratic space とする。QをW上のquadratic form BをQに付随した$W\times W$上のbilinear form とする。すなわち $Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+2B(x,y)$ が成立している。LをWの $\mathbb{Z}$-submodule とする。Wのbase $x_1,\cdots,x_m$ が存在して $L=\mathbb{Z}x_1+\cdots+\mathbb{Z}x_m$ と書ける時 LをWのquadratic lattice と言う。以下では単にlattice と呼ぶ事にする。この時 $m\times m$ 行列 $(B(x_i,x_j))$ の行列式 dL はbaseのとり方によらずに求まる。このdLを Lの discriminant と呼ぶ。以下では$dL\neq 0$ の場合のみ考える。

$\mathbb{Q}$の部分集合 $B(L,L)$ で生成される$\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{s}L$ を Lの scale, $Q(L)$ ($\subseteq B(L,L)$) で生成される$\mathbb{Z}$-module を を Lの norm と呼ぶ。 $(dL)\mathbb{Z}=(\mathfrak{s}L)^m$ を満たす

時に、Lは$\mathfrak{s}L$-modular であると言う。特に $dL=\pm 1$, $\mathfrak{s}L=\mathbb{Z}$ の時にLはunimodular であると言う。unimodular lattice L は $2\mathbb{Z}\subseteq \mathfrak{n}L$ を満たしているが $\mathfrak{n}L=\mathbb{Z}$ の時に odd lattice, $\mathfrak{n}L=2\mathbb{Z}$ の時に even lattice と呼ぶ。

pを有理数体$\mathbb{Q}$のprime spot とする。$\mathbb{Q}$のpでの completion を$\mathbb{Q}_p$とする。pが finite prime の時 $\mathbb{Q}_p$は p-adic number field である。$\mathbb{Z}_p$をその p-adic integer のなす ring とする。この時WとLの局所化をそれぞれ $W_p=W\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$, $L_p=L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ とする。L_p の scale, norm, $\mathfrak{s}L_p$-modular 等の言葉を前と同様に定義する。dL_p はこの場合 modulo square で定まる。

次にlattice Lの genus G_L とは次の性質をみたすWの lattice M の全体を言う。すなわち任意のfinite prime p に対して直交群$O(W_p)$の元σ_pが存在して $M_p=\sigma_p L_p$ が成立する。またlattice Lの class $\mathrm{cls}L$とは次の条件をみたす lattice M の全体を言う。すなわち直交群$O(W)$ の元σが存在して $M=\sigma L$ をみたす。G_L に含まれる classの個数が有限である事は良く知られている。以上さらに一般的又は詳しい事はO'Meara の本([5]) を参照されたい。

さて以下においては quadratic space W は positive

definiteであると仮定しWのlattice Lとしてはintegral すなわち $\mathfrak{s}L \subseteq \mathbb{Z}$ なるものをあつかう。

Wの任意のlatticeをMとするとその直交群 $O(M) = \{\sigma \in O(W) \mid \sigma M \subset M\}$ は有限群である事が知られている。この時genus G_L のmassを $w(L) = \sum_{cls M \subseteq G_L} 1/|O(M)|$ で定義する。

本論

以下に述べる事はHsiaによる次の予想([3])に対する部分的な解答である。

予想. 任意のpositive definite integral latticeのgenusの中に直交群がtrivial (i.e. $\{\pm 1\}$)となるものが存在する。

以下に述べる定理1, 2はunimodularなlatticeに関するものであり定理3はdiscriminantが1でないものへの部分的拡張である。定理1, 2の証明は[1]を参照されたい。

定理1　直交群がtrivialなrank mのpositive definite unimodular latticeが存在する。ここでmはoddの場合は $m \geqq 43$, even latticeの場合は $m \geqq 144$ なる任意の整数である。

定理2　Lをrank m のpositive definite unimodular lattice, $w = G_L$のmass $= w(L)$, $w' =$ 直交群がtrivialでないlatticeのclassのmass $= \sum_{\substack{\mathrm{cls}\, M \in G_L \\ |O(M)| \geq 2}} 1/|O(M)|$ とする。

この時次の(i), (ii) が成立する。

(i) Lがodd latticeかつ $m \geq 43$ ならば

$$w'/w < 30(\sqrt{2\pi})^m / \Gamma(\tfrac{m}{2})$$

(ii) Lがeven latticeかつ $m \geq 144$ ならば

$$w'/w < 2^{m+1}(\sqrt{2\pi})^m / \Gamma(\tfrac{m}{2})。$$

ここで Γ はGamma functionである。

定理2からわかる様に w'/w は m が増加するにつれて急速に0に近づく。定理1は定理2の系である。定理2の証明は $M \in G_L$, $q \mid O(M)$ （qはprime又は4） なるMから $\mathbb{Z}[\zeta]$-hermitian integral latticeを構成して w' の上限をそれ等のhermitian latticeのmassを使って計算する事によってなされた。（ここでζは1の原始q乗根。） massの計算にはSiegelのmass formulaのorthogonal, unitary両方の場合を用いた（[8], [7]）。

直交群がtrivialであるlatticeに関しては以下の結果がこれまで得られている。

O'Meara(1975[6]) 与えられたlatticeからこの様なlatticeを作るalgorithmを与えた。

Biermann(1981[2]) mを固定した時にdiscriminantがmだけに依存したある定数($\gg m$)より大きければすべてのpositive definite integral $\mathbb{Z}$-latticeのgenusはこの様なlatticeを含む事を示した。

Mimura (1990[4]) rankが36と40のodd unimodular lattice, rank 40のeven unimodular latticeで直交群がtrivialなものを具体的に構成した。

定理2の式を使えば、直交群がtrivialなunimodular latticeのclassの個数は非常に大きい事が容易に計算できるがunimodularな場合には知られている例は味村氏のこの三つの例だけである。又定理2により直交群がtrivialなlatticeのclassの全体に対するmassの比はmが増加するにつれて1に近づく事がわかるがclass numberの比としては評価できないでいる。

rank mが小さい時にはその様なlatticeが存在しない場合がある。例えば良く知られているrank 24のeven unimodular latticeの分類によるとそのすべてのlatticeの直交群はtrivialではない。

以上今までに知られている結果を述べて来たが、次に関心が持たれるのは unimodular でない場合、Biermann の結果を改良する事である。次の定理3はその部分的な解答を与える。

定理3　L を rank m の positive definite integral lattice とする。今任意の finite prime p に対して L_p の Jordan 分解が（p の偶数巾）$\mathbb{Z}_p$-modular なものだけしか含まないと仮定する。この時 m が充分大きければ、G_L の中に直交群が trivial な lattice が存在する。（さらに詳しく言うと L_2 の Jordan 分解の factor の中に scaling によって odd unimodular になるものがあれば $m \geq 43$, scaling によってすべて even unimodular になる場合には $m \geq 144$ なるすべての m について定理3は正しい。）

この定理の証明は Watson による class number を増加させない変換（[9]）を用いて unimodular な場合に帰着させる事によってなされる。Watson の論文は lattice の言葉を用いないで書かれているので、ここでそのあらましを lattice の言葉を用いて説明する事にする。

$p \mid dL$ とする。この時 L_p の Jordan 分解を $L_p = (L_p)_{e_1} \perp (L_p)_{e_2} \perp \cdots \perp (L_p)_{e_\lambda}$ とする。ここで 各 $(L_p)_{e_i}$

は $p^{e_i}\mathbb{Z}_p$-modular な sublattice である。定理の仮定より $2|e_i$, $i=1,\dots,\lambda$, $0\le e_1<e_2<\dots<e_\lambda$ である。今 $L'=\{x\in L \mid B(x,L)\in p\mathbb{Z}\}$ とする。$W\times W$ 上に新しく bilinear form $B'(x,y)=\frac{1}{p}B(x,y)$ を考える。W'をこのB'による quadratic space とするとL'はW'の integral lattice になっている。(WとW'は$\mathbb{Q}$上の quadratic space としては同型である。) L'をW'の lattice として見た時に L'_p の Jordan 分解は $(L'_p)_{e_1'}\perp(L'_p)_{e_2-1}\perp\cdots\perp(L'_p)_{e_\lambda-1}$ となる事が容易にわかる。ここで $(L'_p)_{e_i-1}$, $2\le i\le\lambda$ は $p^{e_i-1}\mathbb{Z}_p$-modular な lattice であり $e_1=0$ ならば $e_1'=1$, $e_1\ge 2$ ならば $e_1'=e_1-1$ である。L'に同様な変換を行ったものをL''とする。L''_pの Jordan 分解は $L''_p=(L''_p)_{e_1''}\perp(L''_p)_{e_2-2}\perp\cdots\perp(L''_p)_{e_\lambda-2}$ ここで $e_1=0$ の時 $e_1''=0$, $e_1\ge 2$ の時 $e_1''=e_1-2$ である。

この様に Watson の変換を各 $p|dL$ について行うと偶数回の変換で unimodular な Lattice $\hat{L}$ を得る。この時次の補題が成立する。

補題 (i) G_L に含まれる任意の lattice M は $G_{\hat{L}}$ に含まれるある lattice $\hat{M}$ に変換される。

(ii) $G_{\hat{L}}$ に含まれる任意の lattice $\hat{M}$ は G_L に含まれるある lattice M を変換する事によって得られる。

(iii) L_2 の Jordan 分解を $(L_2)_{e_1}\perp\cdots\perp(L_2)_{e_\lambda}$ と

した時に scaling によって odd unimodular になる $(L_2)_{e_i}$ が存在するならば $\hat{L}$ は odd unimodular lattice でありそうでない時（任意の $(L_2)_{e_i}$ が scaling によって even unimodular になる時）は $\hat{L}$ は even unimodular になる。

補題の詳しい証明は Watson [9] を参照されたい。

定理3はこの補題と定理1によって証明される。まず定理1によって $\tilde{M}\in G_{\hat{L}}$ かつ $O(\tilde{M})=\{\pm1\}$ なる lattice $\tilde{M}$ が存在する。補題によって $\tilde{M}$ は G_L のある lattice M を変換する事によって得られる。今 $\sigma\in O(M)$, M' を M に Watson の変換を一回行ったものとする。この時任意の $x\in M'$ に対して $B(\sigma x, M)=B(x,\sigma^{-1}M)=B(x,M)\subseteq p\mathbb{Z}$ が成立するから $\sigma x\in M'$ である。すなわち $O(M)\subseteq O(M')$ を得る。$\tilde{M}$ はこの変換を有限回行なって得られる lattice であるから $O(M)\subseteq O(\tilde{M})$ は自明である。従って $O(M)$ は trivial group である。

L が定理3の条件をみたさない時には Watson の変換によっていわゆる almost unimodular な lattice $\hat{L}$ に変換される。(i.e. $p\mid d\hat{L}$ なる任意の p に対して $\hat{L}_p$ の Jordan 分解は (unimodular) $\perp$ ($p\mathbb{Z}_p$-modular) となる。) almost unimodular なlattice についても同様な結果が得られる事が予想されるが今の所1つだけ克服できない困難があって証明できないでいる。代数体上のquadratic spaceのlatticeについても同様な事が予想される。

文献

1. Bannai, E : Positive definite unimodular lattices with trivial automorphism groups, Memoirs of A.M.S. vol.85 nu.429 (1990).
2. Biermann, J : Gitter mit kleiner Automorphismengruppe in Geschlechten von ℤ-Gitten mit positive definiter quadratischer Form (Diss), Göttingen (1981).
3. Hsia, J.S. : Arithmetic theory of integral quadratic forms, Proceedings of the Queen's Number Theory Conference, 1979, Ed. P. Ribenboim, vol.54, pp.173-204.
4. Mimura, Y : Explicit examples of unimodular lattices with the trivial automorphism group, preprint (1990).
5. O'Meara, O.T. : Introduction to Quadratic Forms, Springer-Verlag, New York, 1963
6. ———— : The construction of indecomposable positive definite quadratic forms, J. Reine Angew. Math. 276

(1975), pp. 99–123.

7. Rehmann, U : Klassenzahlen einiger totaldefiniter klassischer Gruppen über Zahlkörpern (Diss), Göttingen, 1971.

8. Siegel, C.L. : Über die analytische Theorie der quadratishen Formen, Annals of Math. 36(1935), pp. 527–606.

9. Watson, G.L.: Transformations of a quadratic form which do not increase the class-number, II, Acta. Arith. 27 (1975), pp. 171–189.