数理解析研究所講究録
第 760 巻 1991 年 24-27

擬軌道追跡性を持つAxiom A微分同相

木更津高専 酒井 一博（Kazuhiro Sakai）

(X, d) をコンパクト距離空間、$f: X \to X$ を位相同相とする。 X の点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が δ - 擬軌道であるとは、$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ $(i \in \mathbb{Z})$ が成立するときを言う。 f が擬軌道追跡性（POTP）を持つとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、f の任意の δ - 擬軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対しある $y \in X$ が存在して $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbb{Z})$ が成立するときを言う。 Bowenは ω - 極限集合の研究にPOTPが有効であることを示し、さらにエルゴード理論の研究にも利用した。 微分可能力学系においては、POTPはある意味で自然に生じる性質であると言える。 例えば、Axiom A 微分同相が強横断性を満たせば、POTP を持つ。 従って、自然な問題としてPOTPを持つAxiom A微分同相は強横断性を満たすだろうかという疑問が生じる。 また森本 [4] は、POTPを持つ微分同相全体は、閉多様体上の微分同相の空間（C^1 - 位相を与える）の中で residual な集合かという問題を提起した。 ここでは

この2つの問題に関連して得られた結果について述べる。

Mを3次元閉 C^∞ 多様体とし、M上の C^1-微分同相全体に C^1-位相を与えた空間を $\mathrm{Diff}^1(M)$ で表す。 POTPを持つM上の微分同相全体を $P^1(M)$ で表し、$\mathrm{Diff}^1(M)$ における $P^1(M)$ の内点を $\mathcal{P}^1(M)$ で表す。

<u>定理1</u>. $P^1(M)$ が $\mathrm{Diff}^1(M)$ で稠密でないようなMが存在する。

<u>定理2</u>. 任意のMに対し、$\mathcal{P}^1(M)$ は Axiom A 微分同相で強横断性を満たすもの全体として特徴づけられる。

定理1は、[2]と[8]の結果を組み合わせることにより得られる。

すべての周期点が双曲的であるような微分同相 $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の全体の内点を $\mathcal{F}^1(M)$ で表す。 最近、青木[1]は、[3]と[6]の結果を用いることにより、$\mathcal{F}^1(M)$ は Axiom A 微分同相で no-cycle を満たすもの全体として特徴づけられることを示した。 その後、守安[5]は $\mathcal{P}^1(M) \subset \mathcal{F}^1(M)$ であること、さらに、$f \in \mathcal{P}^1(M)$ に対し、もしすべての $x \in M$ で安定多様体 $W^s(x)$ の次元が $\{0, \dim M-1, \dim M\}$ のどれかに等しけ

れば、f は強横断性を満たすことを示した。

定理2の証明は [5]の結果に基づいて行なわれる。 $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_\ell$ を $f \in \mathcal{P}^1(M)$ のスペクトル分解とする。 仮りに f が強横断性を満たさないとすると、ある $x \in \Lambda_{i_1}$ と $y \in \Lambda_{i_2}$ で $W^u(x) \cap W^s(y) \neq \phi$ かつ $\dim W^u(x) = \dim W^s(y) = 1$ ($\dim M = 3$ であるから。)を満たすものが存在する。 f が PCTP を持つことを用いるとさらにある点 $z \in \Lambda_{i_3} \neq \Lambda_{i_2}$ で $W^u(x) \cap W^s(z) \neq \phi$, $\dim W^s(z) = 1$ そして $W^u(\Lambda_{i_2}) \cap W^s(\Lambda_{i_3}) \neq \phi$ を満たすものの存在が示せる。 さて $W^u(x) \cap W^s(z) \neq \phi$ で $\dim W^u(x) = \dim W^s(z) = 1$ より、全く同様にしてある $z' \in \Lambda_{i_4} \neq \Lambda_{i_3}$ で $W^u(x) \cap W^s(z') \neq \phi$, $\dim W^s(z') = 1$ そして $W^u(\Lambda_{i_3}) \cap W^s(\Lambda_{i_4}) \neq \phi$ を満たすものの存在が証明できる。 以上の議論を繰り返すことにより $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_\ell\}$ の中で cycle ができてしまい、$f \in \mathcal{P}^1(M)$ は cycle を持たないということに反する。 以上の証明の詳細はいずれかの数学雑誌に掲載される予定である。

参考文献

1. N. Aoki, The set of Axiom A diffeomorphisms

with no-cycle, preprint.

2. J. Franks and C. Robinson, A quasi-Anosov diffeomorphisms that is not Anosov, Trans. AMS, 223 (1976) 267-278.

3. R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, Publ. Math. IHES, 66 (1987), 161-210.

4. 森本明彦，擬軌道追跡性の方法と力学系の安定性，東大数学教室セミナリー・ノート，39 (1979).

5. K. Moriyasu, The topological stability of diffeomorphisms, to appear in Nagoya Math. J.

6. J. Palis, On the C^1 Ω stability conjecture, Publ. Math. IHES, 66 (1987), 211-215.

7. C. Robinson, Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 425-437.

8. K. Sakai, Quasi-Anosov diffeomorphisms and pseudo orbit tracing property, Nagoya Math. J. 111 (1988), 111-114.