

# Capelli 恒等式と Multiplicity-free Actions (joint work with Roger Howe)

京大理 梅田 亨  
(Tōru Umeda)

序. Capelli 恒等式 ([Ca1-3], [Ca4]) は 19 世紀不変式論の有力な道具であり (see [My]), のちに H. Weyl によって典型群の不変式論の展開の中で枢要を占めるものとして扱われた [W]. 併し [ABP, p.324] の如く, それは幾分 "mysterious" なものとして理解されてきた. その表現論的意味が明らかになったのは, 1976 年 Roger Howe [H1] の reductive dual pair の文脈からであった.<sup>(注1)</sup> 即ち,  $GL_n \times GL_n$  の  $n \times n$  行列の上の表現に関して 展開環の中心と不変微分作用素の関係を述べたものが Capelli identities にほかならず, これはまた再交換子定理としても捉えることができる. 我々はこの現代的な視点の下, Capelli 恒等式を抽象化した問題 (Abstract Capelli Problem) 及び古典的な場合の直接の拡張としての具体的表示の問題 (Concrete Capelli Problem) の二つの問題を定式化し, V. Kac [K] の分類した「連結 reductive 群の既約な

「multiplicity-free 表現」(13系列) について, これらの問題を  
を解明した [HU].

研究の動機について少し述べよう。R. Howe [H1] の視  
点に加えて [S], [Sh1], [H6] を眺めると自然にいくつかの共  
通の話題が浮かび上ってくる: (1) 基本解 (2) 根元均質ベク  
トル空間と  $\mathfrak{h}$ -函数 (3) Fourier 変換及び  $\zeta$  函数 (4) Capelli  
恒等式 (5) multiplicity-free action 等々。実はこの中で (4) の  
Capelli 恒等式は [S] の  $\mathfrak{h}$ -函数の計算例 (p.143) に于  
くと顔もあうわすだけである。一方 [Sh1] の " $\mathfrak{h}$ -函数" の計算の  
概均質ベクトル空間からの見直しは [RS] にあり, (5) の  
multiplicity-free action については [K] という研究があった。  
ここで自ら "missing link" として Capelli 恒等式の一般化  
が問題となる。

今,  $G$  を連結 reductive 代数群  $/\mathbb{C}$ ,  $V$  を  $G$  の (有限次元) 表現  
としよう。  $G$  の Lie 環を  $\mathfrak{g}$ , 展開環及其中心を  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$   
と表す。表現  $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  に伴って  $\mathcal{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{D}(V)^G$   
という algebra hom が生ずる。ここで  $\mathcal{P}\mathcal{D}$  は多項式係数の微  
分作用素環であり  $\mathcal{P}\mathcal{D}^G$  は  $G$ -不変元を意味する。

Problem: (1)  $\mathcal{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}\mathcal{D}(V)^G$  は surjective か?  
さらには一般にこの準同型を記述せよ。

これが何故 Capelli 小恒等式の拡張になつてゐるのか、については後述する。  $P\mathcal{O}(V)^G$  を記述することはとりも直さず  $P(V)$  (=  $V$  上の多項式環) 上の  $G$  の表現を既約分解することと同じであるが、multiplicity-free という場合には、これは整然と分解される。環論的な言いかたの一般論は、更に生成系の具体的決定にも大いに役立つ。また  $V$  の特異軌道との関係(対応)もはっきりする。

Capelli 自身のところまで書いたことだが、Capelli の微分作用素は  $\mathfrak{gl}(n)$  を生成する。しかも表現論的にはっきりした意味をもつ "良" (もしくは敢えて "標準的" ともいえる) 生成系である。このような  $\mathfrak{gl}(n)$  の中心の特徴づけを通じて  $\mathfrak{gl}(n) \rightarrow P\mathcal{O}(V)^G$  を記述することが我々の基本姿勢である。

この小文は [HU] の解説であるが紙数に制限があるので部分的にならざるを得ない。しかしできれば補足も兼ねて原論文とは少し違つた味を出したい。

1. 以下は vector 空間、代数群は複素数体  $\mathbb{C}$  上で考える。代数群  $G$  が vector 空間  $V$  に働くものとする。これが 概均質 であるとは  $V$  の中に Zariski open (従つて稠密な)  $G$ -orbit が存在するとき言う [S]。我々が以下で用ゐるのはこの理論の

ごく基本的な事実である: 相対不変式(多項式)の自由群は自由群である([S, 定理1]), 特に相対不変式の生成する環は多項式環である。

概均質ベクトル空間の  $h$ -函数の例として古典的存も  $q$  に "Cayley の公式" というものがある ([T1, p.114]).  $n \times n$  行列  $\text{Mat}_{n \times n}$  の座標を  $x_{ij}$ , 対応する微分作用素を  $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$  と書く。定数係数  $n$  階の微分作用素  $\Omega$  を  $\Omega = \det(\partial_{ij})$  と定義する。これは Cayley の omega process と呼ばれる。さて Cayley の公式とは  $\Omega$  を  $\det(x_{ij})^s$  に作用させたときの計算である。

$$\Omega (\det x_{ij})^s = s(s+1)\cdots(s+n-1)(\det x_{ij})^{s-1}$$

一般に  $\Omega(\det x)^s = \beta(s)(\det x)^{s-1}$  とする ( $n$  次  $q$ ) 多項式  $\beta(s)$  の存在は易しい。問題存  $q$  はこの  $\beta$  の具体的計算である。この公式の類似として Garding (1947 [G]) は  $\text{Mat}_{n \times n}$   $q$  代りに対称行列を考えた。さらに志村 (1984 [Sh1]) は交代行列の場合も含む一般的な設定 (古典型 Hermitic 対称空間に附随する) の下新たな " $h$ -函数" を定義し計算した。[RS] はこれを概均質ベクトル空間の立場からとる  $q$  例外型  $q$  <sup>(=2 $q$ )</sup> case も含め統一的に見た (parabolic type  $2$ ' nilpotent radical が可換)。

古典的存 Cayley の公式の証明は  $||$   $q$   $||$  知られ  $||$   $q$   $||$   $||$   $q$   $||$   $||$   $q$   $||$  (cf. [U]) Capelli identity を用いると簡単である ([S, p.143]).

Garding の場合も対応する Capelli 型恒等式は Turnbull [T2] によつて得られてゐる (see also [S, p.146].)

2. 19世紀不変式論で「新たな不変式・共変式をつくり出す」手段として polarization operator が重要な役割を占めてきた。例えば変数  $x = (x_1, \dots, x_n)$  の一部に  $y = (y_1, \dots, y_n)$  という別の変数に置きかえる  $P_y x = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  のように作る。Mat $_{n \times n}$  を  $n$  個のベクトル  $v$  の並んだものと見れば、この  $n$  個の変数について  $n^2$  個の polarization operators が生ずる。これは現代の用語でいえば右(又は左)正則表現の infinitesimal generators となり、丁度  $o(n)$  の表現になつてゐる:

$$\begin{cases} E_{ij} = \sum_{l=1}^n x_{li} \partial_{lj} & (\text{右}) \\ E'_{ij} = \sum_{l=1}^n x_{jl} \partial_{il} & (\text{左}) \end{cases}$$

この節にありわたる Cayley の omega process  $\Omega$  は  $SL_n(\mathbb{C})$  の作用と可換であるが  $GL_n(\mathbb{C})$  とは可換でない。しかし

$$(\det x_{ij})^{-\Omega}$$

は  $GL_n$  と可換になる。Capelli [Ca1] はこれが polarization operators を用いて書けることを発見した。即ち

$$\det \begin{bmatrix} E_{11+(n-1)} & E_{12} & \cdots & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22+(n-2)} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & \cdots & E_{nn} \end{bmatrix} = (\det x_{ij})^{-\Omega}$$

ここに左辺の非可換成分をもつ行列式は

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n}$$

によって定義される。これが "Capelli identity" である。一旦これが確立されると Cayley の公式が従うことは見易い。何故なら左辺の非可換行列式は diagonal 以外の成分は  $\det x_{ij}$  であるからである。

Capelli [Ca3] はさらに lower order の "Capelli identities" を得ており (see also [H1]), これを用いるとこの場合の志村型  $\zeta$ -函数も計算できる。

ここにこの状況の表現論的意味も反響しておき。  $\text{Mat}_{n \times n}$  への左右の作用から、その上の多項式函数への  $GL_n$ , 従って  $\mathfrak{gl}_n$  の左右の作用が生ずる (上述の  $E_{ij}$  及  $E_{ij}'$ )。古典的不変式論の第一基本定理 (或いは近似的に Peter-Weyl とこの場合言うことも) によって  $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n)$  の二つの作用は多項式係数微分作用素の環の中で互いに commutant である (see [H1])。特に中心  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n))$  は  $GL_n \times GL_n$ -不変な微分作用素全体にうつされる。Capelli 恒等式の右辺は  $GL_n \times GL_n$ -不変であるから、直前に述べたことにより polarization operators で書けることが保証される。その具体的表示が Capelli 恒等式にほかならない。

斯くして序の中に述べた問題が何故 Capelli 恒等式と関係するかがわかりました。

3. さて  $\rho \circ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}\mathcal{D}(V)^G$  が surjective となるなら勿論  $\mathcal{P}\mathcal{D}(V)^G$  は可換でない。  $\mathcal{P}\mathcal{D}(V)^G$  は  $\mathcal{P}(V)$  の "G-endomorphism ring" であるから、可換性は即ち  $\mathcal{P}(V)$  が G-module として既約分解したとき各既約成分の重複度が高々1であることを意味する。このような G の V 上の表現を multiplicity-free という [K]。Kac は 連結 reductive の既約な multiplicity-free 表現を分類した。我々はこの場合に Capelli Problem を考える。尚、[Sh1] や [RS] に扱われているのは Hermitian symmetric space から来る場合で  $G = K_{\mathbb{C}}$ ,  $V = \mathfrak{p}_+$  となる。

本題に入る前に再交換子定理との関係をひとこと注意する。

命題.  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  が multiplicity-free とする。このとき

$$\mathcal{P}\mathcal{D}(V)^G = \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))' = \rho(\rho \circ \mathcal{U}(\mathfrak{g}))''$$

ここで ' は  $\mathcal{P}\mathcal{D}(V)$  の中の交換団を意味する。従って特に  $\rho(\rho \circ \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$  が弱閉であることと surjectivity は同値である。また  $\rho(\rho \circ \mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cap \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))'$  だから  $\rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$  が弱閉ならば surjectivity が従う。

4.  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  が multiplicity-free とする。これは必然、概均質になる。より詳しく multiplicity-free になる必要充分条件は或る Borel subgroup  $B \subset G$  があって  $B$ -prehomogeneous になることである (see [Se], [VK])<sup>(註2)</sup>。このとき  $B$  に関する相対不変式とは ( $B$  に関する) highest weight vector にほかならぬから、概均質バクトル空間の基本的事実 ([S, Th 1] = [SSM, Prop. 3]) によって  $P(V)$  の分解にあらわれる highest weight は自由羊群になる。この自由羊群の基底に対応する  $B$ -相対不変式は  $B$ -singular set のうち codim 1 の部分の既約成分の定義多項式である。<sup>(註3)</sup>

5.  $P\mathcal{D}(V)^G$  の記述, 或いは同じことだが  $P(V)$  の既約分解の記述の爲の一般論を不変式論的に言いかえよう。  $P\mathcal{D}(V)$  から graded ring を作る操作は  $G$ -equivariant であり, 故に結局  $P(V \oplus V^*)^G$  を調べることに帰着する。これに関して

定理 次の三つの ring は互に同型であり, 多項式環である:

$$P(V \oplus V^*)^G, \quad P(V)^H, \quad P(V)^N$$

ここで  $H = V^*$  の中の generic point  $\lambda_0$  ( $\in$  open orbit) の stabilizer

$$N = \text{Borel } B \text{ の unipotent radical } (= (B, B))$$



又、同型は canonical (又、 $\neq$  とも canonical):

$P(V \otimes V^*)^G$  と  $P(V)^N$  の対応は highest weight の理論の環論的いゝかえであり、 $P(V \otimes V^*)^G \rightarrow P(V)^H$  は

$$f(v, v^*) \mapsto f(v, \lambda_0)$$

という制限 (evaluation) がある。この injectivity は根拠的といふことからすぐ判る。surjectivity は multiplicity-free という事を用いる。先ほどの注意から  $P(V)^N$  は多項式環と判る。この同型を通いこすことが出来る。判る。

この定理は  $P(V)^G$  の決定に有用であり、既に [J], [Sh], [RS] など実質上又は部分的に利用されてきた。(註4)

6.  $P(V)^G$  を求める方法としては

- (1) B-singular set を求める。
- (2)  $P(V \otimes V^*)^G \cong P(V)^H$  を用いる。
- (3) Chevalley の restriction theorem を用いる。
- (4) 具体的に  $S^r(V) = r$  階対称テンソルを  $r$  が小さいときに分解させる。又 Weyl の次元公式などを用いて次元の基礎を作る。
- (5) reductive dual pair を利用する。

などさまざまあり個々の case に応じて便利なものを選ぶべきである。(註4) を参照のこと)

我々の ([HV]) は (2) と (5) を主に用いた. (2) の使い方の一例として Hermitian symmetric 2'な  $\text{Spin}_9 \subset \text{GL}_9$  の場合について述べると, generic stabilizer の reduction とし

$$\text{Spin}_9 \supset \text{Spin}_7 \supset \text{G}_2 \supset \text{SL}_3$$

が成り立ち, 2'れらがイモザル式に判る.

7.  $\mathcal{P}(V)$  の分解と  $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$  の元との対応は次のよう  
なものである.

$\mathcal{P}(V) \supset Y$  :  $G$  submodule に対し 2'の dual

$\mathcal{P}(V^*) \supset Y^*$  をとる.  $Y$  の basis  $\{y_i\}$  と 2'の dual  
basis  $\{y_i^*\}$  をとると

$$\theta_{Y, Y^*} = \sum y_i y_i^*$$

が成り立ち,  $\theta_{Y, Y^*}$  は  $Y$  に対応する  $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$  の元である.

対応する不変微分作用素は同じ式で  $\mathcal{P}(V^*)$  の元で定数係数の  
微分作用素と思っ直せばよい. 特に  $Y$  が 1次元のとき,

$\theta_{Y, Y^*} = y y^*$  2'  $y$  は  $G$ -relative invariant 2' 対応する  
不変微分作用素が Capelli 恒等式の右辺に相当する.

8. さて  $G$  の連結 reductive 2'  $V$  上の表現が既約とする.  
このようなるものは Kac [K] 2'分類される. 我々の問題  
が肯定的に解ける場合には  $G$  は  $\text{GL}_n (= \mathbb{C}^*)$  を含む 2' なる.

いける。また Euler operator との自明な不変微分作用素が  $\mathfrak{gu}(\mathfrak{g})$  からの image に入り得る。このとき Kac の list からの次の 13 系列が考察の対象となる:

$$\left\{ \begin{array}{l} GL_n \otimes GL_m, S^2 GL_n, \Lambda^2 GL_n, O_n \otimes GL_1 \\ Sp_{2n} \otimes GL_1, Sp_{2n} \otimes GL_2, Sp_{2n} \otimes GL_3, Sp_4 \otimes GL_m \\ Spin_7 \otimes GL_1, Spin_9 \otimes GL_1, Spin_{10} \otimes GL_1 \\ G_2 \otimes GL_1, E_6 \otimes GL_1 \end{array} \right.$$

ここに  $GL_n \otimes GL_m$  は  $GL_n \times GL_m$  の  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$  の表現を意味し、他の  $O \otimes GL$  や  $Sp \otimes GL$  も同様。また  $S^2 GL_n, \Lambda^2 GL_n$  は対称及び反対称の 2 階のテンソル表現。Spin はスピノ表現であり、例外型の  $G_2, E_6$  は各々 7 次元、27 次元とて最低次元表現を意味する。

詳しい議論は書く余裕がない。[HU] を直接見ると。但しこの小文の終りに結果の list を再録しておく。中には数字 (たとえは 11.1.9 のように) は [HU] の式番号である。

$\mathfrak{gu}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{PD}(V)^G$  が surjective であるのは 3 つの場合 ( $Sp_{2n} \otimes GL_3, Spin_9 \otimes GL_1, E_6 \otimes GL_1$ ) である。しかしこの場合でも商体までうつれば surjective である。

Hermitian symmetric の場合 relative invariant (non-trivial) があることと、tube type であることが同値であることに注意しておく。

9. 説明を全く省くわけにもいれないので、重要な Capelli element について少し述べる。

Capelli 恒等式の左辺にあらわされる行列の "固有多項式" を考えよう：

$$C(z) = \det \begin{bmatrix} E_{11+(n-1)+z} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22+(n-2)+z} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & \dots & \dots & E_{nn+z} \end{bmatrix}$$

この係数が実質的に lower order の Capelli elements であるか、展開は次のように階乗函数を用いて行う：

$$C(z) = C_n + z C_{n-1} + z(z-1) C_{n-2} + \dots$$

$C_n$  が最も重要な Capelli 恒等式の左辺。  $C_k$  が central であることは  $C_n$  のそれと同様である。この証明は non-trivial である。(注5) この  $k$ -th Capelli element について

- i)  $C_k$  は degree  $k$  ( $U(\mathfrak{gl}_n)$  の普通の filtration の意味で)
- ii)  $C_k$  は表現  $\int_n^D$  の  $\text{depth}(D) < k$  なるものを消す。

ここに  $\int_n^D$  は Young 図形  $D$  のパラメータとして与えられた  $GL_n$  の既約表現。

の成り立ち、逆にこれら二つの性質は  $C_k$  を (定数倍を除く) 2) 決める。  $GL_n \otimes GL_m$ ,  $S^2 GL_n$  の場合は  $PQ(V)$  の

標準的 base にうつる。(特徴づけ i) ii) を用いる.)

10.  $\Lambda^2 GL_n$  の場合はずっと微妙である。実際ここには  $\mathfrak{gl}(n) \rightarrow \mathcal{PD}(V)^G$  は Kernel を持つ。  $\mathcal{PD}(V)^G$  は  $[\frac{n}{2}]$  の生成系をもつ (Pfaffian を書ける。) とおきに対応する  $\mathfrak{gl}(n)$  の元  $C_k^\wedge$  (skew Capelli elements) が構成できる。とおきは  $m = [\frac{n}{2}]$  とし

$$C_{2m}^\wedge(z) = \sum_{a,b=0}^m (-1)^{a+b} C_a^\wedge C_b^\wedge Q_{m-a}(z) Q_{m-b}(z-1),$$

$$Q_j(z) = \prod_{c=0}^{j-1} (z - 2c)$$

を「解く」として  $C_k^\wedge$  たちを書ける。実際は既知の多項式と書けるというわけではないが...  $C_k^\wedge$  については

i)  $C_k^\wedge$  は degree  $k$

ii)  $C_k^\wedge$  は  $\mathfrak{p}_n^D$  の column の偶数  $2^u < 2k$  となる表現  $\mathfrak{p}_n^D$  を満たす。 ( $k \leq n/2$  の場合)

という性質が特徴づけられる。また  $k > n/2$  ならば

$C_k^\wedge$  ( $k > n/2$ ) は  $\mathfrak{p}_n^D$  の column の偶数  $2^u \leq n$  となる  $\mathfrak{p}_n^D$  を満たす。

これをを用いて skew-symmetric case の Capelli 恒等式が得られる。

11. 先に  $\mathcal{PD}(V)^G$  は  $B$ -singular set によって決まることを述べたが,  $G$ -orbit との関係はどうだろうか? 実はこれも密接に関係している,  $G$ -orbits の存在 lattice の構造 (closure relation) が  $\mathcal{PD}(V)^G$  の生成系を決める. これは  $\mathcal{PD}(V)^G$  から  $\mathcal{P}(V)^N$  へうつって考えようとする.

この考察から特に multiplicity-free ならば  $G$ -orbit の数が有限であるという [Se] や [K] によって知られた命題の別証も得られる.

また closure relation は multiplicity-free のときは単体列 (  $Sp_{2n} \otimes GL_3$  ) によって全順序である.

12. Capelli 恒等式の左辺は展開環の center の元を行列式表示されるという著しい特徴をもつ. 他の Lie 環についてこのような center の表示は今まで知られていないのではないかと思う. 実は直交 Lie 環の場合にも類似の行列式表示が可能である. ([HV] の Appendix) しかし, 本来の Capelli element ほど使い易いものではないかも知れない. というのは  $O_n$  の行列表示に depend したものであるから.

尚,  $sp_{2n}$  についても同様のものがあつてもよいとも思われるが 証明法も Appendix の類似をたどる限りうまくはいかない.

(注)

(注1)<sup>(1)</sup> Capelli 恒等式の意味に気がついたのはひと  
 R. Howe だけではないらしい。たとえば Seshadri (see [H1]  
 の postscript)。また佐藤幹夫先生は随分以前 ('60年代?) から御  
 存じであったとも聞いた (坂田先生からの伝聞)。

(注2)<sup>(8)</sup> 今  $Bv_0 \subset V$  が open とする。  $v_0$  の stabilizer  $H^*$  に  
 ついて  $Gv_0 = V$  の  $(G-)$  open orbit  $\cong G/H^*$ .  $\therefore BH^* \subset G$   
 は dense である。一般に  $G$  の subgroup  $K$  について Borel  $B$  s.t.  
 $BK \subset G$  が dense となるものを spherical subgroup とする。  
 このとき  $G$  の有限次元既約表現  $\rho$  について  $K$ -fixed vectors  
 $\rho^K$  は高々 1次元となる。  $P(V \otimes V^*)^G \cong P(V)^H$  の同型性の  
 surjectivity はこのことを使って示される。

spherical subgroup については [Kr], [Br] を参照のこと。  
 この概念はまた不変式論の第一基本定理の証明にも有用である  
 ([H7])。

(注3)<sup>(8)</sup> このにより原理的に  $P(V)$  の分解がわかるが、実  
 行は必ずしも容易ではない。しかし Hermitian Symmetric case  
 では [RS] (see also [MRS]) でこれを扱う。Grassmann の補題  
 についてもある。

(注4)<sup>(9)</sup> たとえば  $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$  の中心, 或いは同じことだが,  $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$  (Adjoint action) を決定するのに, "8" 代表系" とし  
て Cartan subalgebra をとり制限することにより 群  $G$  を  
reduce してゆく. 制限によつて生じた対称性が  
Weyl 群で, これが reflection で生成されるか; 不変式環は  
多項式環となる (Chevalley の定理). これは一般的であるが  
代表系のとり方は Cartan に限ったものでもない (see [H2]).  
上の  $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G \rightarrow \mathcal{P}(V)^H$  も考え方として同じである. ま  
た evaluate する  $\mathfrak{g}$  を singular set 内にとつておくと, 情報は  
失われるが, たとえば surjectivity がいえて, しかも像は多  
項式環となることも証明できる.

Hermitian Symmetric の場合, やはり Cartan に制限する方法も  
あって Johnson [J] はこれを用いているが, Weyl 群不変元  
の degree が  $2i$  ( $i=1, \dots, r=\text{rank}$ ) となることも判る (Moore の  
restricted root theorem)

(注5)<sup>(12)</sup> [H1] も参照のこと. 但し証明の細部に誤りがあ  
った. その指摘は若山氏が Math. Rev. の際気づいたこととし  
てなされた [W]. 訂正も出ている. 正しい証明は  
[HU] の Appendix 1 にある. また量る群版 [Jb] は classical case  
に対する新証明を与える. (1991. 5. 1.)



## Summary:

TABLE:

Group action	Hermitian symmetric	Abstract Capelli	Relative invariant (Degree)	Explicit Capelli for rel.inv.	Degrees of fundamental generators (Number)	Degrees of generators of $ZU(\mathfrak{g})$	Graph of closure relations (Number of singular orbits)	Generic stabilizer if reductive
$GL_n \otimes GL_m$ ( $n \geq m$ )	○	yes	$n = m$ ( $n$ )	11.1.9	$1, 2, \dots, m$ ( $m$ )	$1, 2, \dots, n$ ; $1, 2, \dots, m$	linear ( $m$ )	$GL_n$ if $n=m$
$S^2GL_n$	○	yes	○ ( $n$ )	11.2.6	$1, 2, \dots, n$ ( $n$ )	$1, 2, \dots, n$	linear ( $n$ )	$O_n$
$\Lambda^2GL_n$	○	yes	$n$ :even ( $n/2$ )	11.3.19	$1, 2, \dots, [n/2]$ ( $[n/2]$ )	$1, 2, \dots, n$	linear ( $[n/2]$ )	$Sp_n$ if $n$ even
$O_n \otimes GL_1$	○	yes	○ (2)	11.4.12	$1, 2$ (2)	$2, 4, \dots, 2[\frac{n}{2}]$ ; 1	linear (2)	$O_{n-1}$
$Sp_{2n} \otimes GL_1$		yes	×	—	1 (1)	$2, 4, \dots, 2n$ ; 1	linear (1)	
$Sp_{2n} \otimes GL_2$ ( $n \geq 2$ )		yes	○ (3)	11.6	$1, 2, 2$ (3)	$2, 4, \dots, 2n$ ; $1, 2$	linear (3)	$GL_2$
$Sp_{2n} \otimes GL_3$ ( $n \geq 3$ )		NO	×	—	$1, 2, 3; 2, 3, 4$ (6)	$2, 4, \dots, 2n$ ; $1, 2, 3$	NOT linear : (13.5) (5)	
$Sp_4 \otimes GL_m$ ( $m \geq 4$ )		yes	$m = 4$ (4)	11.8	$1, 2, 3, 4; 2, 4$ (6)	$2, 4$ ; $1, 2, \dots, m$	linear (5)	$Sp_4$ if $m=4$
$Spin_7 \otimes GL_1$		yes	○ (2)	11.9.6	$1, 2$ (2)	$2, 4, 6$ ; 1	linear (2)	$G_2$
$Spin_9 \otimes GL_1$		NO	○ (2)	—	$1, 2, 2$ (3)	$2, 4, 6, 8$ ; 1	linear (3)	$Spin_7$
$Spin_{10} \otimes GL_1$	○	yes	×	—	$1, 2$ (2)	$2, 4, 6, 8, 10$ ; 1	linear (2)	
$G_2 \otimes GL_1$		yes	○ (2)	11.12.1	$1, 2$ (2)	$2, 6$ ; 1	linear (2)	$SL_3$
$E_6 \otimes GL_1$	○	NO	○ (3)	—	$1, 2, 3$ (3)	$2, 5, 6, 8, 9, 12$ ; 1	linear (3)	$F_4$

## BIBLIOGRAPHY

- [ABP] M. Atiyah, R. Bott and V. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. math. **19** (1973), 279–330.
- [Ba] W.N. Bailey, "Generalized Hypergeometric Series," Cambridge Math. Tracts 32 (reprinted by Hafner 1965), Cambridge Univ. Press, 1935.
- [Bo] G. Boole, "Calculus of Finite Differences," Chelsea, 1872.
- [B1] A. Borel, *Hermann Weyl and Lie Groups*, in "Hermann Weyl 1885–1985," (Centenary Lectures) ed. by K. Chandrasekharn, Springer Verlag, 1986, pp. 53–82.

- [B2] ———, “Linear Algebraic Groups,” Benjamin, 1969.
- [BW] A. Borel and N. Wallach, “Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representation of Reductive Groups,” Princeton Univ. Press, 1980.
- [Br] M. Brion, *Classification des espaces homogènes sphériques*, *Compositio Math.* **63** (1987), 189–208.
- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley’schen Operation  $\Omega$  auf gewöhnliche Polar-Operationen*, *Math. Annalen* **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Ricerca delle operazioni invariantive fra piu serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie*, *Atti delle Scienze Fis. e Mast. di Napoli* (2) **I** (1888), 1–17.
- [Ca3] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, *Math. Annalen* **37** (1890), 1–37.
- [Ca4] ———, “Lezioni sulla Theoria delle Forme Algebriche,” Pellerano, Napoli, 1902.
- [CL] R.W. Carter and G. Lusztig, *On the modular representations of the general linear and symmetric groups*, *Math. Z.* **136** (1974), 193–242.
- [D] J. Dixmier, *Sur les algèbres enveloppantes de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  et  $\mathfrak{af}(n, \mathbb{C})$* , *Bull. Sc. math.* 2è serie **100** (1976), 57–95.
- [FZ] D. Foata and D. Zeilberger, preliminary manuscript.
- [G] L. Gårding, *Extension of a formula by Cayley to symmetric determinants*, *Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2* **8** (1947), 73–75.
- [Ha] S.J. Haris, *Some irreducible representation of exceptional algebraic groups*, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 75–106.
- [Htn] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry,” Springer Verlag, 1977.
- [He1] S. Helgason, “Groups and Geometric Analysis,” Academic Press, 1984.
- [He2] ———, *A duality for symmetric spaces with applications*, *Adv. in Math.* **5** (1970), 1–54.
- [He3] ———, *Some results on invariant differential operators on symmetric spaces*, preprint 1989 May.
- [H1] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 539–570; *Erratum*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990), p. 823.
- [H2] ———, *Some highly symmetric dynamical systems*, preprint.
- [H3] ———,  *$(GL_n, GL_m)$ -duality and symmetric plethysm*, in “Proc. Ind. Acad. Sci. (Math. Sci.)” 1987, pp. 85–109.
- [H4] ———, *The Classical Groups and invariants of binary forms*, in “The Mathematical Heritage of Hermann Weyl,” *Proc. Symp. Pure Math.*, 1988, pp. 133–166.
- [H5] ———, *Dual pairs in physics: Harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons*, in “Lectures in Applied Math.,” 1985, pp. 179–207.
- [H6] ———, “Lectures on Harmonic Analysis,” to appear.
- [H7] ———, *The First Fundamental Theorem of Invariant Theory and Spherical Subgroups*, preprint.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli Identity, the Double Commutant Theorem, and Multiplicity-free Actions*, *Math. Annalen* (to appear).

- [Hu] J.E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory," Springer Verlag, 1972.
- [I] J.-I. Igusa, *A classification of spinors up to dimension twelve*, Amer. J. Math. **92** (1970), 997–1028.
- [Ja] N. Jacobson, "Lectures in Abstract Algebra II," Springer Verlag, 1952.
- [Jb] M. Jimbo, *q-analogue of  $U(\mathfrak{gl}(N+1))$ , Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.
- [J] K. D. Johnson, *On a ring of invariant polynomials on a Hermitian symmetric space*, J. Algebra **67** (1980), 72–81.
- [K] V.G. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), 190–213.
- [KPV] V.G. Kac, V.L. Popov and E.B. Vinberg, *Sur les groupes linéaires algébriques dont l'algèbre des invariants est libre*, C.R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 875–878.
- [Ki] T. Kimura, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, (in Japanese), Sûgaku **32** (1980), 97–118.
- [KT] K. Koike and I. Terada, *Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type  $B_n, C_n, D_n$* , J. Alg. **107** (1987), 466–511.
- [KS] B. Kostant and S. Sahi, *The Capelli identity, tube domains and the generalised Laplace transform*, Adv. Math. (to appear).
- [Kz] J-L. Koszul, *Les algèbre de Lie graduée de type  $\mathfrak{sl}(n, 1)$  et l'opérateur de A. Capelli*, C.R. Acad. Sc. Paris **292** (1981), 139–141.
- [Kr] M. Krämer, *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math. **38** (1979), 129–153.
- [L] S. Lang, "Algebra," Addison-Wesley, 1965.
- [Mc] I.G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," Oxford Univ. Press, 1979.
- [MRS] I. Muller, H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées*, Math. Annalen **274** (1986), 95–123.
- [MF] D. Mumford and J. Fogaty, "Geometric Invariant Theory," Springer Verlag, 1982.
- [My] F. Meyer, *Berit über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie*, Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung **1** (1892), 79–292.
- [Ra] M. Raïs, *Distributions homogènes sur des espaces de matrices*, (Thèse Sc. math. Paris, 1970), Bull. Soc. math. France, Mémoire **30** (1972), 1–109.
- [N] M.L. Nazarov, *Quantum Berezinian and the Classical Capelli Identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [R] G.C.M. Ruitenburg, *Invariant ideals of polynomial algebras with multiplicity-free group actions*, Compositio Math. **71** (1989), 181–227.
- [RS] H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Opérateurs différentiels de Shimura et espace préhomogènes*, Invent. math. **90** (1987), 409–442.
- [S] M. Sato, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, notes by T. Shintani (in Japanese), Sûgaku no Ayumi **15-1** (1970), 85–157.
- [SK] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.
- [SSM] M. Sato, T. Shintani and M. Muro, *Theory of prehomogeneous vector spaces (Algebraic Part) — the English translation of Sato's lecture from Shinatni's note*,

- Nagoya Math. J. **120** (1990), 1–34.
- [Se] F.J. Servedio, *Prehomogeneous vector spaces and varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 421–444.
- [Sch1] G. Schwarz, *Representation of simple Lie groups with regular rings of invariants*, Invent. math. **49** (1978), 167–191.
- [Sch2] ———, *Representation of simple Lie groups with free module of covariants*, Invent. math. **50** (1978), 1–12.
- [Sch3] ———, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, I.H.E.S. Publ. **51** (1980), 37–135.
- [Sch4] ———, *Invariant theory of  $G_2$* , Bull. Amer. Math. Soc. New Ser. **9** (1983), 335–338.
- [Sch5] ———, *On classical invariant theory and binary cubics*, Ann. de L’Inst. Fourier **37** (1987), 191–216.
- [Sch6] ———, *Invariant theory of  $G_2$  and  $Spin_7$* , Commentarii Math. Helvetici **63** (1988), 624–663.
- [Sh1] G. Shimura, *On differential operators attached to certain representations of classical groups*, Invent. math. **77** (1984), 463–488.
- [Sh2] ———, *Invariant differential operators on Hermitian symmetric spaces*, Ann. Math. **132** (1990), 232–272.
- [Th] R. Thrall, *On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring*, Amer. J. Math. **64** (1942), 371–388.
- [T1] H.W. Turnbull, “The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants,” Dover, 1960.
- [T2] ———, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 76–86.
- [U] T. Umeda, *A combinatorial proof of Cayley’s formula*, (in Japanese), in “RIMS Kôkyûroku Algebraic Combinatorial Theory.” to appear
- [VK] E.B. Vinberg and B.N. Kimelfeld, *Homogeneous domains in flag manifolds and spherical subgroups of semi-simple Lie groups*, Functional Anal. Appl. **12** (1978), 12–19.
- [Wa] M. Wakayama, *Review of “Remarks on Classical Invariant Theory” by Roger Howe*, Math. Rev. **90h:22015a,b** (1990), p. 4463.
- [W] H. Weyl, “The Classical Groups, their Invariants and Representations,” Princeton University Press, 1946.
- [Wi] S.G. Williamson, *Symmetry operators, polarizations, and a generalized Capelli identity*, Linear and Multilinear Alg. **10** (1981), 93–102.
- [ZS] O. Zariski and P. Samuel, “Commutative Algebra 1,” Van Nostrand, 1958.
- [Zb] D. Zeilberger, *The method of creative telescoping*, to appear, J. Symb. Comp..
- [Z] C. Zhu, *Thesis*, Yale Univ. 1990.