数理解析研究所講究録
第 767 巻 1991 年 140-144

ＬＥＳにおけるレイノルズ応力の非等方表現

東大生研　　堀　内　潔（Kiyosi Horiuti）

Large Eddy Simulation （以下ＬＥＳ）では、フィルタリングにより、ナビエ・ストークス方程式の非線形項から、Leonard 項（１）、Cross 項（２）、および、Subgrid scale （ＳＧＳ）Reynolds応力項（３）が生じる．

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \qquad (1)$$

$$C_{ij} = \overline{u_i' \bar{u}_j + \bar{u}_i u_j'} \qquad (2)$$

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \qquad (3)$$

（１）は、フィルターを定義すれば直接計算できるので、モデル化は不要である．[1]（２）にたいしては、Bardina モデル[2]が、（３）については、Smagorinsky モデル[3]（４）が提案され、（４）は、全てのＬＥＳで用いられてきた．

$$\overline{u_i' u_j'} = 2K_G/3\,\delta_{ij} - \nu_e\, e_{ij} \qquad (4)$$

$$\nu_e = (C_S \Delta)^2 \left[e_{ij}^2/2 \right]^{1/2}$$

$$e_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$$

ここに、$K_G = \overline{u_i' u_i'}/2$は、ＳＧＳ乱流エネルギーである．ところで、近年のスーパー・コンピュータの登場は、低レイノルズ数ながら、Direct Numerical Simulation（ＤＮＳ）を可能にし、このデータを用いた（１）－（３）のモデルにたいする直接的な検証が行われている．[2, 4-6]特に、（３）について、過去の検証は、ＳＧＳ Reynolds応力項の厳密値とSmagorinsky モデルによるモデル値との相関係数（Ｃ．Ｃ．）は低く、負値を示すこともあることを明らかにした．[5-6]Lilly [7]は、Kolmogorov則がSmagorinsky モデルと整合することを示し、Kolmogorov定数を１．７として、C_S の理論値を約０．２であるとした．しかし、過去のＬＥＳの種々の剪断乱流への適用では、C_S は流れ場に応じて最適化され、一様等方性乱流では、約０．２、[4]乱流混合層では、約０．１５、[8]チャンネル流では、約０．１、[5-6, 9-10] が採用されてきた．さらに、チャンネル流では、壁での粘着条件との整合性を図るために、経験的に、（４）の長さスケールΔには、減衰関数 f_d が乗ぜられてきた．[9-10] f_d としては、Van Driest関数[11] が一般的に用いられている．本研究の目的は、モデル定数の普遍性がより高く、経験的なVan Driest関数に代わる一般化のより容易な減衰関数が導入でき、ＤＮＳとの相関もより高い、ＳＧＳ Reynolds応力にたいするモデルを提案することである．本報告での適用は、チャンネル流

に限るが、以下、その座標系は、下流方向をｘまたは１方向、壁に垂直な方向をｙまたは２方向、横断方向をｚまたは３方向とする．

本研究で採用した基本的なアプローチは、Reynolds応力の非等方表現の高次項[12]をＳＧＳモデルに導入することである．Horiuti [12]では、渦粘性係数への高次補正項（５）が渦粘性係数の効果的な減衰関数として使える可能性を示唆した．

$$\nu_e = \frac{3}{2}C_\nu\frac{k}{\varepsilon}\left[\ \frac{2}{3}k-\frac{2}{3}\frac{1}{C_\nu}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left\{C_{A1}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_m}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_m}+C_{A2}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_m}\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial x_l}\right\}\right] \qquad (5)$$

ところで、（５）式［・］内は、乱流エネルギーの非等方表現に対応するが、レイノルズ平均モデルでの、チャンネル流におけるC_{A1}の最適値はnormal成分 $\overline{u_2'^2}$ の乱流強度に対応する値[13]に近いことがわかった．したがって、渦粘性係数中のエネルギー・スケールとしては Normalshear stress が適切であると結論された．本研究では、同じアイデアをＬＥＳに適用する．

（５）の渦粘性係数ν_eは、

$$\nu_e = C_\nu C_\varepsilon\ \tau\ E \qquad (6)$$

と書ける．ここに、Ｅはエネルギー・スケール、$\tau=k/\varepsilon$は、タイム・スケールで、ＬＥＳでは、通常、$\tau=\Delta/C_\varepsilon/K_G^{1/2}$・と置換えられる．最初に、$K_G$としてはＤＮＳデータからの厳密値を採用し、Ｅの適切な選択を探る．まず、$E=K_G$とした場合の $\overline{u_1' u_2'}$ のｘ－ｚ平面内の平均値 $\langle\overline{u_1' u_2'}\rangle$ のｙ分布を図１に示した．モデル値はＤＮＳからの厳密値にくらべ壁近くで値が大きすぎる．通常、Van Driest減衰関数（$(1-\exp(-y_+/25))$ ；y_+は壁座標）がΔに乗ぜられている理由の一つはここにある．したがって、（５）式に見るような補正が必要である．最も直接的なＥの計算方法は、（５）を直接適用する方法であるが、これには各項の計算と総計３定数の最適化が必要になり、ＬＥＳに用いるには、いたづらにモデルを煩雑化する．ここでは、Leonard 項とBardina モデルの総和が［・］内第２項の一部に相当すること[14]に注目し、［・］内第２項を $C_{A3}\Delta^2\ (\overline{\bar{u}_j\bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_j\bar{\bar{u}}_j)$ で近似してみる．図２は、この場合の平均値の分布であるが、モデル値は厳密値にくらべかなり大きく、項の一部を取り込んだだけでは、減衰が不十分であり、ＬＥＳに用いるには、（５）の展開は不適切である．同時に、（５）の展開は特に$y_+<5$の領域で、負の渦粘性係数を与える場合もあることを付記しておく．そこで、直接 $\overline{u_2' u_2'}$ のＤＮＳからの厳密値をＥとして用いた場合の平均値分布が図３である．ここでは、効果的なν_eの減衰が特に新たな減衰関数を導入しなくとも行われ、厳密値とよく一致している．紙面の都合で、図は省くが、ＤＮＳデータとの相関もSmagorinsky モデルに比べ、かなり改善されている．したがって、Normal shear stressがより適切なエネルギー・スケールであることが、ＬＥＳでも確認された．

以上は、ＤＮＳデータを用いた 'A priori 'なテストであるが、実際のＬＥＳ計算に導

入するには、Normal shear stress およびK_G を Grid scale （ＧＳ）変数で表現しなければならない．数種類のモデルをＬＥＳ計算に導入して調べた結果、下記のモデル（７）が、最も有効に機能することがわかった．

$$\nu_e = (C_S{}^A \Delta)^2 \left[e_{ij}{}^2 / 2 \right]^{1/2} f_d{}^A \tag{7}$$

$$f_d{}^A = 3 \left(\overline{u}_2 \overline{u}_2 - \overline{\overline{u}}_2 \overline{\overline{u}}_2 \right) / \sum_i \left(\overline{u}_i \overline{u}_i - \overline{\overline{u}}_i \overline{\overline{u}}_i \right)$$

モデル（７）では、通常のSmagorinsky モデルに、$f_d{}^A$ が damping factor として掛かる．図４は、$\langle C_S{}^A (f_d{}^A)^{1/2} \rangle$をチャンネル中央での実効的なSmagorinsky 定数で正規化した値を、Van Driest関数と合わせて示すが、効果的な減衰がされていることがわかる．さらに、Van Driest関数では、同じレベルのy_+では、均一に減衰が掛かり、ＬＥＳには重要な局所性が表現できないが、モデル（７）は表現できる．ところで、Normal shear stressをエネルギー・スケールとして用いることによって、効果的な減衰関数の役割を果たせることは、Launder et al.[15] でも指摘されている．そこでは、Second order closure を用いているが、Normal shear stress の近似の精度がまだ低いため、減衰関数としての精度も低い．また、Yakhot et al[16] は、（７）式$f_d{}^A$ と同様な factor の導入をしているが、理論的な根拠は示されておらず、また、本報告で用いたＳＧＳ乱流エネルギーの比のかわりに、ＧＳ乱流エネルギーの比としているため、格子の解像度を上げていったとき、$f_d{}^A$ の影響が消えない欠点がある．本研究では、ＬＥＳの利点、すなわち、ある程度の精度の情報をもったＧＳ成分がすでに解かれていることを活用して、ＳＧＳへの一種の外挿を行った．前述の一様等方性乱流、乱流混合層、チャンネル流の３つの流れ場を比較すると、ＧＳの乱流強度の非等方性は、この順に強くなり、最適化されたC_S もこの順で小さくなっている．したがって、C_S の大きさの相違は、乱流強度の非等方性を反映したものと考えられ、モデル（７）は、この効果を取り入れることができる．ところで、モデル（７）の定数 $C_S{}^A$ の最適値は約０．１５となり、これは Lilly [7]の理論値０．２よりは小さいが、Smagorinsky モデルの０．１よりは大きめであり、より高い普遍性をもっていることが期待できる．Mason et al.[17] は、チャンネル流でも、格子の解像度を上げていくとC_S の最適値は０．２に近づいていくと報告しているが、（７）は、この報告も裏付けることができる．ただし、（７）は、壁での漸近挙動は満足しない．Van Driest関数も同様に満足しないが、ＬＥＳでは、このことは結果にあまり悪い影響は与えないようであるが、モデル（７）のより複雑な流れ場への適用は今後の課題として残る．本モデルの詳細については、Horiuti [18] を参照されたい．

本研究の一部は文部省科学研究費 No.01613002 、No.02302043 および、東京大学・日立製作所共同研究によっている．ここに記して謝意を表する．

参考文献

1)Leonard,A.(1974) Adv.Geophys.18A,237.

2)Bardina,J. J.H.Ferziger and W.C.Reynolds(1980) AIAA Paper 80-1357.

3)Smagorinsky,J.(1963) Mon.Weather Rev.91,99.

4)Clark,R.A., J.H.Ferziger and W.C.Reynolds(1977) Report TF-9,Dept.Mech.Eng., Stanford Univ.

5)Piomelli,U., P.Moin and J.H.Ferziger(1988) Phys.Fluids 31,1884.

6)Horiuti,K.(1989) Phys.Fluids A1,462.

7)Lilly,D.K.(1966) NCAR Manuscript 123.

8)Mansour,N.N., J.H.Ferziger and W.C.Reynolds(1978) Report TF-11, Dept. of Mech. Eng.,Stanford Univ.

9)Moin P. and J.Kim(1982) J. Fluid Mech.118,341.

10)Horiuti,K.(1987) J. Comp. Phys. 71,343.

11)Van Driest,E.R.(1956) J. Aeronaut. Sci. 23,1007.

12)Horiuti,K.(1990) Phys. Fluids A2,1708.

13)Nisizima,S. and A.Yoshizawa(1987) AIAA J. 25,414.

14)Horiuti,K.(1989) Proc.Int.Symp.Comp.Fluid Mech. Nagoya.

15)Launder,B.E. and D.P.Tselepidakis(1990) Near-Wall Turbulence, Hemisphere Publ. Co.,818.

16)Yakhot,A.,S.A.Orszag,V.Yakhot and M.Israel(1989) J.Sci.Comp. 4,139.

17)Mason,P.J. and N.S.Callen(1986) J. Fluid Mech. 162,439.

18)Horiuti,K.(1990) Proc.Int.Workshop "Large Eddy Simulation...Where Do We Stand?",St.Petersburg,Florida, also submitted to Phys. Fluids A.

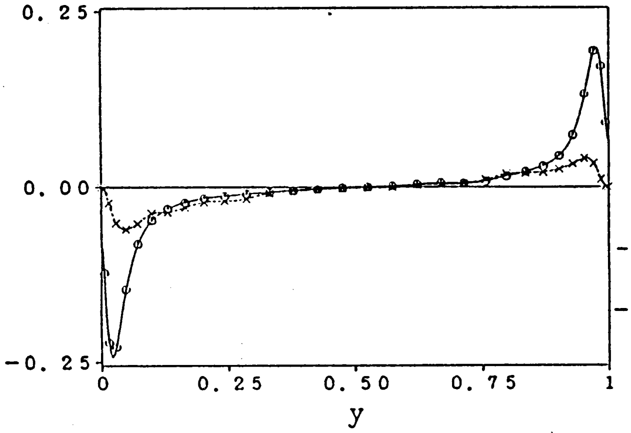

図1　<$\overline{u_1' \ u_2'}$>のy分布
——○——：(6) で$E=K_G$とした場合のモデル値
--×---：DNSデータからの厳密値

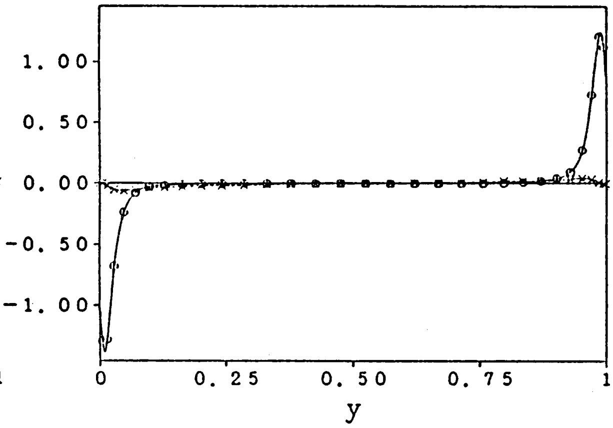

図2　<$\overline{u_1' \ u_2'}$>のy分布
——○——：(5) によるモデル値
---×---：DNSデータ

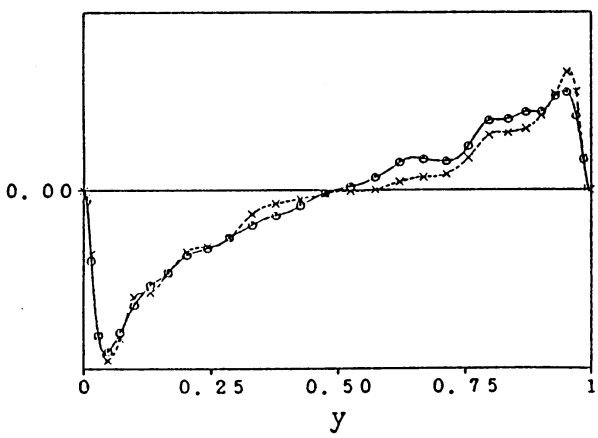

図3　<$\overline{u_1' \ u_2'}$>のy分布
——○——：(6) で$E=\overline{u_2' \ u_2'}$とした場合のモデル値
--×---：DNSデータ

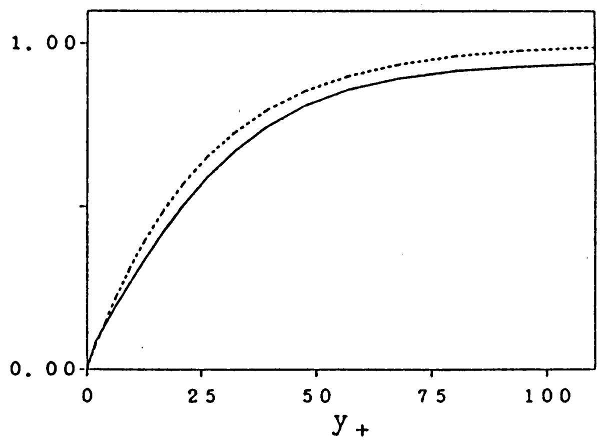

図4　減衰関数の分布
————：モデル(7)
-------：Van Driest関数