数理解析研究所講究録
第 776 巻 1992 年 1-15

Holonomic q-difference system and r.p.p. decomposition

名大理 青本和彦 (Kazuhiko Aomoto)
名城大理工 加藤芳文 (Yoshifumi Kato)

今回話した内容は、林原フォーラム1990で行われた

K. Aomoto, Y. Kato

A q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals

の解説です. 特に代数的な部分に中心を置いて話しました.

§1. b-function の構造

X を n 次元 integral lattice, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をその basis とする.

$\overline{X} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ とおくと n 次元代数的トーラスとなる.

次の写像により座標を入れる.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & \overline{X} & \cong & (\mathbb{C}^*)^n & \ni & t = (t_1, \cdots, t_n) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \\ x_j & \longrightarrow & x_j \otimes q & \longrightarrow & (1, \cdots, \underset{j\text{-th}}{\widehat{q}}, \cdots 1) & = & q^{x_j} \end{array}$$

ここでqは$0<q<1$の数としfixする．$x=\nu_1 x_1+\cdots+\nu_m x_m \in X$に対し$q^x=(q^{x_1})^{\nu_1}\cdots(q^{x_m})^{\nu_m}$となる．shift作用素$Q_j$, $j=1,\cdots,m$, Q^x, $x\in X$, を$Q_j f(t)=f(q^{x_j}t)$, $Q^x f(t)=Q_1^{\nu_1}\cdots Q_m^{\nu_m} f(t)=f(q^x t)$で定義し次の$q$-差分方程式系を考える．

$$Q^x \Phi(t) = b_x(t)\Phi(t) \qquad \text{——— ①}$$

ここで$b_x(t)\in R^\times(\bar{X})=R(\bar{X})-\{0\}$，つまりnonzeroな有理関数とする．次が成立．

「①がcompatible

$\Longleftrightarrow \{b_x(t)\}_{x\in X}$が1-cocycleをなす．

i.e. $b_{x+x'}(t)=b_x(t)\,Q^x b_{x'}(t)$, $x, x'\in X$」

1-cocycle $\{b_x(t)\}_{x\in X}$が$b_x(t)=Q^x\varphi(t)/\varphi(t)$, $x\in X$, $\exists\varphi(t)\in R^\times(\bar{X})$とかけるとき1-coboundaryと呼ばれ1-stコホモロジー$H^1(X,R^\times(\bar{X}))=\dfrac{\text{1-cocycles}}{\text{1-coboundaries}}$が考えられる．次は基本的な規格化定理である．

<u>定理</u> 任意の$H^1(X,R^\times(\bar{X}))$のコホモロジークラスは①式でΦを次の様な特殊のq-乗法関数

$$\Phi(t)=t^\alpha\prod_{j=1}^{m}\frac{(a_j' t^{\mu_j})_\infty}{(a_j t^{\mu_j})_\infty}, \quad m\in\mathbb{Z}^+,\ a_j, a_j'\in\mathbb{C},$$

$$\mu_j\in\check{X},\ \alpha\in\check{X}_{\mathbb{C}}=\check{X}\otimes\mathbb{C}$$

を取ったときに表れる $\{b_x(t)\}_{x\in X}$ を代表cocycleとして持つ、ここで $t^{\mu_j} = t_1^{\mu_j(x_1)} \cdots t_n^{\mu_j(x_n)}$, $t^{d} = t_1^{d(x_1)} \cdots t_n^{d(x_n)}$ とする。

<u>注意</u> $\Phi(t)$ は有理関数ではないのでコホモロジーは一般に自明ではない。又 $\Phi(t)$ は unique に決まらない。

有理関数 $b_x(t)$ は次の様に具体的にかける。

$$b_x(t) = q^{d(x)} \frac{b_x^+(t)}{b_x^-(t)},$$

$$b_x^+(t) = \prod_{\mu_j(x)>0} (a_j t^{\mu_j})_{\mu_j(x)} \times \prod_{\mu_j(x)<0} (a_j' q^{\mu_j(x)} t^{\mu_j})_{-\mu_j(x)},$$

$$b_x^-(t) = \prod_{\mu_j(x)>0} (a_j' t^{\mu_j})_{\mu_j(x)} \times \prod_{\mu_j(x)<0} (a_j q^{\mu_j(x)} t^{\mu_j})_{-\mu_j(x)}$$

a_j, a_j' に対し次の確定特異点型の条件を課す。

<u>Assumption</u> $a_j \neq 0$, $a_j' \neq 0$, $\forall j$.

$$U_j(t) = t^{(\lambda_j - \lambda_j')\mu_j} \frac{(a_j t^{\mu_j})_\infty}{(a_j' t^{\mu_j})_\infty} \cdot \frac{(q a_j^{-1} t^{-\mu_j})_\infty}{(q a_j'^{-1} t^{-\mu_j})_\infty}, \quad a_j = q^{\lambda_j}, \quad a_j' = q^{\lambda_j'}$$

とおくと、ヤコビのテータ関数の関係より $U_j(t)$ は周期関数, i.e., $Q^x U_j(t) = U_j(t)$ となり、$\Phi(t)$ を $(T_{j_1} \cdots T_{j_k} \Phi)(t) = U_{j_1}(t) \cdots U_{j_k}(t) \Phi(t)$ で取り替えることができる。その

意味で $\mu_{-j} = -\mu_j$、$a_{-j} = q a_j'^{-1}$、$a'_{-j} = q a_j^{-1}$ と添字を負にまで拡張しておい、$b_x(t)$ は不変、$b_x^+(t)$、$b_x^-(t)$ は up to 単項式で決まる

§2. Jackson積分とドラームコホモロジーのqアナログ

差分作用素 $\Delta_j = \dfrac{1-Q_j}{1-q}$，$j=1,\cdots,n$. をとる、次の形の和

$$\sum_k \varphi_k d_q \psi_k, \quad \varphi_k, \psi_k : \text{functions on } \overline{X}$$

を1-formのqアナログと呼ぶ．Δ_jとの pairing

$\langle \Delta_j, \sum_k \varphi_k d_q \psi_k \rangle = \sum_k \varphi_k \Delta_j \psi_k$ が等しいときに1-formは同値とする、k-formのqアナログについても同様．

q-外微分 d_q を次で定義

$$\begin{array}{rccc} d_q : & \Omega^k & \longrightarrow & \Omega^{k+1} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \omega & \longrightarrow & d_q\omega \end{array}$$

$$d_q\omega = d_q\left(\sum \varphi_{i_1 i_2 \cdots i_k} d_q\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_q\psi_{i_k}\right)$$

$$= \sum d_q\varphi_{i_1 \cdots i_k} \wedge d_q\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_q\psi_{i_k}.$$

$d_q^2 = 0$ など

これらが basis $x_1,\cdots,x_n$ の取り方によらないことも確められる、これを用いてqコバリアント微分 $\nabla: \begin{array}{ccc}\Omega^k & \to & \Omega^{k+1} \\ \omega & \to & \nabla\omega\end{array}$ が

$$d_q(\Phi\omega) = \Phi\cdot\nabla\omega$$

によって定義される. logarithmic 形式 $d_q \log t_j = -\frac{\log q}{1-q}\frac{d_q t_j}{t_j}$ を用いてかくと

$$\nabla\omega = \nabla\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_k} \varphi_{i_1\cdots i_k}\, d_q\log t_{i_1}\wedge\cdots\wedge d_q\log t_{i_k}\Big)$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_{k+1}}\Big(\sum_{\nu=1}^{k+1}(-1)^{\nu}\nabla_{i_\nu}\varphi_{i_1\cdots i_{\nu-1} i_{\nu+1}\cdots i_k}\Big) d_q\log t_{i_1}\wedge\cdots\wedge d_q\log t_{i_{k+1}}$$

となっている. ただし $\nabla_j = \nabla^{\chi_j} = 1 - b_{\chi_j} Q^{\chi_j}$.

より一般に $\nabla^{\chi} = 1 - b_{\chi} Q^{\chi}$ とする. 公式として

1) $\nabla^{\chi+\chi'} = \nabla^{\chi} + \nabla^{\chi'} - \nabla^{\chi}\nabla^{\chi'}$

2) $\nabla^{\chi}\nabla^{\chi'} = \nabla^{\chi'}\nabla^{\chi}$

3) $\nabla^2 = 0$.

$\overline{\omega} = \frac{d_q t_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q t_n}{t_n}$ を X invariant な n-form とし $\xi \in \overline{X}$ の X orbit $X\cdot\xi$ 上の Jackson 積分が次で定義される.

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\xi) = \int_{X\cdot\xi} f\cdot\overline{\omega} = (1-q)^n \sum_{\chi\in X}(Q^{\chi} f)(\xi)$$

定義より $\tilde{f} = \widetilde{Q^{\chi} f}$, $\chi \in X$. $\varphi \in R(\overline{X})$ に対し積分

$$\langle\varphi\rangle = \langle\varphi;\xi\rangle \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\Phi\varphi}$$

を考えると $\langle\varphi\rangle = (1-q)^n \Phi(\xi)\sum_{\chi\in X} b_{\chi}(\xi) Q^{\chi}\varphi(\xi) = \langle b_{\chi}\cdot Q^{\chi}\varphi\rangle$

従って次が成立。

$$\langle \nabla^{\chi}\varphi \rangle = 0$$

$\mathcal{L} = \mathbb{C}[t_1,\cdots,t_n,t_1^{-1},\cdots,t_n^{-1}]$ をローラン多項式環とし、

$$V = \left\{ \varphi = \frac{\overline{\varphi}}{\prod_{j=1}^{m}(a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} \cdot \prod_{j=1}^{m}(a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j}},\ l_j, l_j' \geq 0,\ \overline{\varphi} \in \mathcal{L} \right\}$$

とおく。V は ∇^{χ} 不変 $\nabla^{\chi} V \subset V$ であり $\nabla^2 = 0$ であることより、制限された k-form の空間を改めて

$$\Omega_k = \left\{ \sum_{i_1<\cdots<i_k} \varphi_{i_1,\cdots,i_k}\, d_q \log t_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_q \log t_{i_k} \,\middle|\, \varphi_{i_1\cdots i_k} \in V \right\}$$

とおき $\Omega^{\cdot} = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega_k$ とすると $(\Omega^{\cdot}, \nabla)$ の組は複体をなす。これを de Rham 複体の q アナログという。コホモロジーも考えられ、

$$H^{*}(\Omega^{\cdot}, \nabla) = \sum_{k=0}^{n} H^{k}(\Omega^{\cdot}, \nabla)$$

特に最高次の部分は

$$H^{n}(\Omega^{\cdot}, \nabla) \cong V \Big/ \sum_{j=1}^{n} \nabla_j V = V \Big/ \sum_{\chi \in X} \nabla^{\chi} V$$

となる。特に $\varphi \in V$ の積分 $\langle \varphi \rangle$ はコホモロジーのクラスのみに依存。

<u>注意</u> $\varphi \in V$ の積分 $\overbrace{\langle \varphi \rangle}^{=\langle \varphi, \xi \rangle}$ は φ が X orbit $X\cdot\xi$ 上に pole を持たなければ summable となることも示せる。

§3. Critical points と stable q-cycles

$\alpha = N\eta + \alpha'$, $\alpha, \alpha' \in \check{X}_{\mathbb{C}}$, $\eta \in \check{X}$, とかき $N \to \infty$ のときの積分

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi, \xi \rangle = \int_{X\cdot\xi} \Phi \varphi \varpi, \qquad \varphi \in V \qquad ―― ②$$

の漸近挙動を調べる. η, α' は fix している.

$$\Phi(t) = t^{\alpha} \prod_{j=1}^{m} \frac{(a_j' t^{\mu_j})_\infty}{(a_j t^{\mu_j})_\infty} = (t^{\eta})^N t^{\alpha'} \prod_{j=1}^{m} \frac{(a_j' t^{\mu_j})_\infty}{(a_j t^{\mu_j})_\infty}$$

より $|\Phi(t)|$ の主要部は $|t^\eta| = |q^{(\eta,\lambda)}| = q^{Re(\eta,\lambda)}$ となる. ただし $t = q^\lambda$ とおいた. 上記積分②が収束するためには X orbit $X\cdot\xi$ 上に分母 $(a_j t^{\mu_j})_\infty$, $1 \leq j \leq m$, は pole を持たない、$\underbrace{|t^\eta|}_{\text{漸近挙動を調べやすくするため}}$ が増加する方向での和は有限の 2つが要請される. これより次をみたす $\xi = q^\lambda$ の X orbit をさがすことが大事になる.

「n個の線形独立な $\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \cdots, \mu_{j_n}$ で $\eta \in \mathbb{R}_{>0}\mu_{j_1} + \cdots + \mathbb{R}_{>0}\mu_{j_n}$, $a_j' \xi^{\mu_{j_k}} = q^{l_k}$, ${}^\exists l_k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n$.」

上の j_k として正のものだけをとるのではコホモロジーの基底との関係で数が足りず $\Phi \to T_{j_1} \cdots T_{j_k} \Phi$ のとり替えで議論が変わらないことを注意し j_k を負 $-j_k$ まで広げる. 任意の組 $J = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset \{1, 2, \cdots, m\}$ に対し符号 $\varepsilon_i = \pm 1$ が条件

$$\eta \in \mathbb{R}_{>0}\mu_{\varepsilon_1 j_1} + \cdots + \mathbb{R}_{>0}\mu_{\varepsilon_n j_n}$$

のもと、一意に決まる、

$J = \{j_1, \cdots, j_n\} \subset \{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m\}$

s.t. $\mu_{j_k}, 1 \leq k \leq n$ は $\check{X}_{\mathbb{R}}$ で線形独立

に対し

$$\overline{X}_J = \{t = q^\lambda \in \overline{X} \mid \log_q a_j' + (\mu_j, \lambda) \equiv \mathbb{Z} \mod \frac{2\pi i}{\log q} \text{ for } j \in J\},$$

$$\overline{X}_J^+ = \{t = q^\lambda \in \overline{X} \mid \log_q a_j' + (\mu_j, \lambda) \equiv \mathbb{Z}^+ \mod \frac{2\pi i}{\log q} \text{ for } j \in J\},$$

とおく．ただし $a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$a \equiv b \mod \frac{2\pi i}{\log q}\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(a-b) \in \ , \ \mathrm{Im}(a-b) \equiv 0 \mod \frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}$$

$$a \equiv b \mod \frac{2\pi i}{\log q}\mathbb{Z}^+ \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(a-b) \quad , \ \mathrm{Im}(a-b) \equiv 0 \mod \frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}$$

とする．

<u>定義</u> $t = q^\lambda \in \overline{X}_J^+ \cap X \cdot 3$ が critical

$\Longleftrightarrow$ L_η が $\overline{X}_J^+ \cap X \cdot 3$ で有限な最小値をとる

$\Longleftrightarrow$ $|t^\eta|$ が $\overline{X}_J^+ \cap X \cdot 3$ で有限な最大値をとる．

Cr_J で $\overline{X}_J^+$ 内の critical な点の集合とする．ここで $\overline{X}_J^+$ を X orbit に分解して考えている．定義より $Cr_J \neq \phi$ と $\eta \in \mathbb{R}_{>0}\mu_{j_1} + \cdots + \mathbb{R}_{>0}\mu_{j_m}$ が同値になる．q^λ : critical，の X orbit $C(q^\lambda) = \overline{X}_J^+ \cap X \cdot q^\lambda$ を stable q-cycle と呼ぶ．当然 $q^\lambda, q^{\lambda'} \in Cr_J$，$q^\lambda \neq q^{\lambda'}$ ならば $C(q^\lambda) \cap C(q^{\lambda'}) = \phi$．また $q^\lambda \in Cr_J$，$q^{\lambda'} \in Cr_{J'}$ に対しても $q^\lambda \neq q^{\lambda'}$ の条件を入れる．

<u>命題</u>

1) $\overline{X}_J^+$ 内の critical な点の数は $K_J = [\mu_{j_1}, \cdots, \mu_{j_m}]^2$

2) $\overline{X}$ 内の critical な点の数は $K = \sum_J K_J = \det\left(\sum_{j=1}^m \mu_j(x_r)\mu_j(x_s)\right)$

ここで $[\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_n}] = \det|\mu_{j_k}(x_\ell)|$ とおいた、証明は略する.

critical な点の判定条件として次の命題がある.

<u>命題</u> $t = q^\lambda$ が critical

$$\Leftrightarrow (Q^{-\chi} b_\chi^-)(q^\lambda) = b_\chi^-(q^{\lambda-\chi}) = 0 \quad \text{for } {}^\forall\chi \quad \text{s.t. } (\eta,\chi)>0.$$

コホモロジー $H^n(\Omega^\cdot,\nabla)$ の次元は上でできた K により下から評価される.

<u>命題</u> $\dim H^n(\Omega^\cdot,\nabla) \geq K$.

この命題の証明は $C_r = \coprod_J C_{r_J} = \{\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(K)}\}$ とし $\varphi \in \mathcal{L}$ に対する積分 $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi;\xi^{(r)}\rangle = \int_{X\cdot\xi^{(r)}} \Phi\varphi\,\overline{\omega}$ を考える. しかし一般には $\xi^{(r)} \in J \subset \{1,2,\cdots,m\}$ とはならないため Φ が $X\cdot\xi^{(r)}$ 上 pole を持ち上の積分は収束しない. この場合 $J = J_+ \cup J_-$ とわけ Φ を $\Phi_J = \left(\prod_{j\in J_-} T_j\right)\Phi$ でおきかえればよい. これを積分の正規化(regularization)と呼ぶ.

$$\operatorname{reg}\left(\int_{X\cdot\xi^{(r)}} \Phi\varphi\,\overline{\omega}\right) = \int_{X\cdot\xi^{(r)}} \Phi_J\,\varphi\,\overline{\omega} = \int_{\mathcal{C}(\xi^{(r)})} \Phi_J\,\varphi\,\overline{\omega}.$$

そして $\varphi_1,\cdots,\varphi_K \in \mathcal{L}$ を上手にとれば漸近展開を調べることにより $\det\left(\operatorname{reg}\left(\int_{\mathcal{C}(\xi^{(r)})} \Phi\cdot\varphi_s\,\overline{\omega}\right)\right) \neq 0$ がいえ証明が得られる、

§4. Upper estimate of dim $H^n(\Omega^\cdot, \nabla)$

この節の目標は次の定理を証明することである．

定理　a_i, a_i' : generic の条件の元に次が成立．

$$\dim H^n(\Omega^\cdot, \nabla) = \kappa .$$

前節で $\dim H^n(\Omega^\cdot; \nabla) \geq \kappa$ は証明されているので逆方向の評価を得ればよい．なお等式成立のための具体的条件はまだ求まっていない，これからの課題である．

$\varphi(t) \in \mathcal{L}$ が $b_\chi^-(t) \mid Q^\chi \varphi(t)$ をみたすとき，$\varphi(t) = (Q^{-\chi} b_\chi^-)(t) \cdot \overline{\varphi}(t)$, $\overline{\varphi}(t) \in \mathcal{L}$, とかける．そして

$$(\nabla^\chi \varphi)(t) = (Q^{-\chi} b_\chi^-)(t) \cdot \overline{\varphi}(t) - u^\chi b_\chi^+(t) (Q^\chi \overline{\varphi})(t)$$

となる．そこで $\mathcal{L}$ 上の差分作用素 D_χ を次で定義する．

$$D_\chi = D_\chi(u, a, a'; t, Q) = (Q^{-\chi} b_\chi^-)(t) - u^\chi b_\chi^+(t) \cdot Q^\chi , \quad \chi \in X.$$

Lemma 1) $\underbrace{\mu_j(\chi)\mu_j(\chi') \geq 0}_{\forall j}$ をみたす $\chi, \underbrace{\chi'}_{\in X}$ に対し

$$D_{\chi+\chi'} = D_\chi \circ (u^{\chi'} b_{\chi'}^+(t) Q^{\chi'}) + D_{\chi'} \circ (Q^{-\chi-\chi'} b_\chi^-)(t),$$

2) $\forall \chi \in X$ に対し

$$D_{-\chi} = -D_\chi \circ (u^{-\chi} Q^{-\chi}).$$

これより条件の元で $D_{\chi+\chi'}\mathcal{L} \subset D_\chi \mathcal{L} + D_{\chi'}\mathcal{L}$, $D_{-\chi}\mathcal{L} = D_\chi \mathcal{L}$

$$H_j = \{ x \in X_{\mathbb{R}} \mid (\mu_j, x) = 0 \}$$

とおくと超平面の和集合 $\bigcup_{j=1}^{m} H_j$ は $X_{\mathbb{R}}$ 上に扇(Fan) F を定義する。F の有限単体的分割 $\hat{F}$ を一つとり固定する。

$$\Delta(1) = \{ \hat{F} \text{ の cone で } \dim = 1 \} \ni \sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \underbrace{\chi_\sigma}_{\text{primitive}}.$$

とおく。$Y = \{ \chi_\sigma \mid \sigma \in \Delta(1) \} \supset Y^+ = \{ \chi \in Y \mid (\eta, \chi) > 0 \}$.

とし

<u>定義</u> $$\mathcal{O}_q(u) = \sum_{\chi \in X} D_\chi \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$$
$$= \sum_{\substack{\chi \in X \\ (\eta, \chi) > 0}} D_\chi \mathcal{L}$$
$$= \sum_{\chi \in Y^+} D_\chi \mathcal{L}.$$

後２つの等号は先の Lemma から従う。和の index set Y^+ は有限集合になっていることに注意。$\mathcal{O}_q(u)$ は一般に $\mathcal{L}$ の部分ベクトル空間であるが $\mathcal{O}_q(0) = \sum_{\chi \in Y^+} (Q^{-\chi} b_\chi^-)(t) \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ のイデアルになる。次は §3 の命題のいいかえである。

<u>Lemma.</u> $V(\mathcal{O}_q(0)) = \{ \text{critical points} \}$. $\dim \mathcal{L}/\mathcal{O}_q(0) = \kappa$.

従って u に関する deformation に関して $\mathcal{O}_q(u)$ の次元がどのように変化するかと、$\mathcal{L}/\mathcal{O}_q(u) \cong H^n(\Omega^\cdot, \nabla)$ を条件の元に

示す. ローラン多項式 $f=\sum_{\omega\in\check{X}} c_\omega t^\omega$ に対しニュートン polyhedron が次で定義される.

1) $\mathrm{Supp}(f)=\{\omega\in\check{X}\mid c_\omega\neq 0\}$.

2) $\Delta(f)=\mathrm{Supp}(f)$ の凸閉包 (ニュートン polyhedron)

定義より $\Delta(f\cdot g)=\Delta(f)+\Delta(g)$ が成立する. $b_x^\pm(t)$ が1次式の積で表されているので $b_x^\pm$, $Q_{a_j}^\pm b_x^\pm$, $Q_{a_j'}^\pm b_x^\pm$, $Q^{x'} b_x^\pm$ 等の Newton Polyhedron は同じ. ここで $Q_{a_j}^\pm$ は $a_j\to a_j q^{\pm1}$, $Q_{a_j'}^\pm$ は $a_j'\to a_j' q^{\pm1}$ に対応した差分演算子. また $\{0\}\in\Delta(b_x^+)$. 十分大きな $c>0$ をとり

$$K=K(c)=\{\omega\in\check{X}_{\mathbb{R}}\mid \|\omega\|\leqq c\}$$

とおくと K の境界上の格子点 $\omega\in\partial K\cap\check{X}$ は

$$\{\omega\}=(\partial K\cap\check{X})\cap(\omega'+\Delta(b_x^+)),\quad \exists\omega'\in\check{X}\cap(K-\partial K),$$

$x\in Y^+$ の形に表される. 従って K 上にサポートを持つローラン多項式の空間を $\mathbb{C}\langle K\rangle$ とすると次が成立する

<u>Lemma.</u> $\mathcal{L}=\mathbb{C}\langle K\rangle+\Omega_q(0)$

$\dim \mathcal{L}/\Omega_q(0)=K$ より. $\varphi_1,\cdots,\varphi_K\in\mathcal{L}$. をとり $\xi=$ linear span of $\varphi_1,\cdots,\varphi_K$、とし $\mathcal{L}=\xi\oplus\Omega_q(0)$ とできる. 任意の単項式は ($\omega\in K$ となる)

$$t^\omega=\sum_{x\in Y^+}(Q^{-x}b_x^-)(t)\,\psi_x^{(\omega)}(t)+\varphi(\omega)$$

$\psi_x^{(\omega)}(t) \in \mathcal{L}$, $\varphi^{(\omega)} \in \mathfrak{g}$ と表せる．ここで十分 C を大きくとったことより次を仮定してよい

1) $\Delta(\varphi) \subset k$ ， $\forall \varphi \in \mathfrak{g}$

2) $\Delta(\psi_x^{(\omega)})$, $\Delta(\psi_x^{(\omega)}) + \Delta(b_x^+) \subset k$

これより写像

$$\#_0 : \Big(\bigoplus_{\substack{x \in Y^+ \\ \omega \in k \cap \check{X}}} \mathbb{C}\,\psi_x^{(\omega)}\Big) \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}\langle k \rangle$$

$$\Big(\bigoplus C_x^{(\omega)} \psi_x^{(\omega)}(t), \varphi(t)\Big) \longmapsto \sum_{x,\omega} C_x^{(\omega)} a^{-x} b_x^-(t)\, \psi_x^{(\omega)}(t) + \varphi(t)$$

は写像

$$\#_u : \Big(\bigoplus_{\substack{x \in Y^+ \\ \omega \in k \cap \check{X}}} \mathbb{C}\,\psi_x^{(\omega)}\Big) \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}\langle k \rangle$$

$$\Big(\bigoplus C_x^{(\omega)} \psi_x^{(\omega)}(t), \varphi(t)\Big) \longmapsto \sum_{x,\omega} C_x^{(\omega)} D_x\, \psi_x^{(\omega)}(t) + \varphi(t)$$

に連続的に拡張できる．$\#_0$ は全射より u：十分小なときには $\#_u$ も全射になる．よって $C \to +\infty$ をとることにより

<u>命題</u> $\mathfrak{g} + \Omega_q(u) = \mathcal{L}$ が generic に成立．

$2m$ コの非負整数の組 $(L, L') = (l_1, \cdots, l_m; l_1', \cdots, l_m')$ に対し

$$\Omega_q(u; L, L') = \sum_{x \in Y^+} \Big(\prod_{j=1}^{m} Q_{a_j}^{l_j'} Q_{a_j}^{-l_j}\Big) D_x \mathcal{L} + \sum_{l_j > 0} (1 - a_j q^{-l_j} t^{u_j}) \mathcal{L}$$

$$+ \sum_{l_j'>0} (1 - a_j' q^{l_j'-1} t^{\mu_j}) \mathcal{L}$$

とおく. $\left(\prod_{j=1}^{m} Q_{a_j'}^{l_j'} Q_{a_j}^{-l_j}\right) D_x = D_x(a_1 q^{-l_1}, \cdots, a_m q^{-l_m}; a_1' q^{l_1'}, \cdots a_m' q^{l_m'})$

であり $\mathfrak{O}_q(0; L, L')$ はイデアルになる. $|L| + |L'| > 0$ のときはヒルベルトの Nullstellensatz より $\mathfrak{O}_q(0; L, L') = \mathcal{L}$ となる. 上の命題と同様にして u: 十分小のとき $\mathfrak{O}_q(u; L, L') = \mathcal{L}$, $|L| + |L'| > 0$, が成立.

<u>定理</u> generic な条件のもとに

$$H^m(\Omega^\cdot, \nabla) \cong \mathcal{L} / \mathfrak{O}_q(u),$$

特に

$$\dim H^m(\Omega^\cdot, \nabla) = K.$$

証明の概略. $(L, L') = (l_1, \cdots, l_m; l_1', \cdots; l_m')$, $x \in X$ とし

$$\varphi = \frac{\overline{\Phi}}{\left\{\prod_{\mu_j(x)} (a_j' t^{\mu_j})_{l_j' - \mu_j(x)} (a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j}\right\} \times \left\{\prod_{\mu_j(x)<0} (a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} (a_j q^{-l_j - \mu_j(x)} t^{\mu_j})_{l_j + \mu_j(x)}\right\}}$$

$\Phi \in \mathcal{L}$, とすると次が成立.

$$(\nabla^x \varphi) \times \left\{\prod_{j=1}^{m} (a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} \cdot (a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j}\right\} = \left(\prod_{j=1}^{m} Q_{a_j'}^{l_j'} Q_{a_j}^{-l_j}\right) D_x \Phi.$$

証明は $\Phi(t)$ が単項式のときに示し、それを linear にばらせばよい. 定理の証明に戻る. 空間 V に次の filter を入れる,

$$V_{(L;L')} = \left\{ \varphi \in V \;\middle|\; \varphi = \frac{\overline{\varphi}}{\prod_{j=1}^{m}(a_j' t^{\mu_j})_{l_j'} \prod_{j=1}^{m}(a_j q^{-l_j} t^{\mu_j})_{l_j}},\ \overline{\varphi} \in \mathcal{L} \right\}$$

$$V_l = \sum_{|L|+|L'|=l} V_{(L,L')}$$

$$\mathcal{L} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \quad \subset V = \bigcup_{l=0}^{\infty} V_l .$$

genericに $\mathcal{O}\mathcal{l}_q(u;L,L') = \mathcal{L}$, $|L|+|L'|>0$ より $^\forall\varphi \in V_l$ は $\varphi - \sum_{x\in X} \nabla^x \psi_x \equiv 0 \mod V_{l-1}$ となる. 帰納法により $V_0=\mathcal{L}$ の元と φ は cohomologous となる.

$$\mathcal{O}\mathcal{l}_q(u) \subset \left(\sum \nabla^x V\right) \cap \mathcal{L} \subset \sum_{x\in X} \nabla^x V \cong \nabla \Omega^{n-1}$$

より自然に写像

$$\mathcal{L}/\mathcal{O}\mathcal{l}_q(u) \to V/\sum_{x\in X}\nabla^x V \cong H^n(\Omega^\cdot, \nabla)$$

が定義できる.

$$K \leqq \dim H^n(\Omega^\cdot, \nabla) \leqq \dim \mathcal{L}/\mathcal{O}\mathcal{l}_q(u) \leqq \dim \mathcal{L}/\mathcal{O}\mathcal{l}_q(0) = K$$

となり証明が完了する.

以上.