

複素射影空間の安定ホモトピーについて

信州大学教養部 向井純夫 (Juno Mukai)

このテーマの主目的は、Mosher [Mo] が扱った無限次元複素射影空間 $CP^\infty = CP$ の安定ホモトピー群 $\pi_k^S(CP)$ の 2-成分の群拡大の未決定部分、つまり $k = 13, 15, 16, 17$ の場合を決定することである。Mosher の結果は次のようになる。

Theorem A. $\pi_k^S(CP)$ の 2-成分は、 $9 \leq k \leq 18$ のとき、次の表のようになる；

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	Z_8	0	Z_4	0	$Z_8 \oplus Z_2$	Z_2	$Z_8 \oplus Z_2$	$(Z_2)^3$	$Z_{32} \oplus Z_8$	Z_4
gen.		$i\zeta_2$		$i2v^1$	$i\tilde{\sigma}'$	$i\tilde{v}$	$i\tilde{v}''$	$i\tilde{v}^2, i\sigma^2, i\kappa$	ϕ, ψ	$i\sigma^2$

なお、Mosher によれば、 $k = 19$ のときは $Z_{64} \oplus Z_4$ である。

我々の方法は composition methods であり、 $\pi_k^S(CP^n)$ を $k \leq 18$ のとき、すべて決定する。非安定な視点での考察と James splitting の使用及び四元数準射影空間 Q_n のホモトピー群において、より小さな不確定要素 (indeterminacy) をもつ Toda brackets の選択が key point である。

§ 1. まず記号と基本的な Lemma を用意する。 $F = R, C, H$; $d = \dim_{\mathbb{R}} F$; $\gamma_n(F): S^{d(n+1)-1} \rightarrow FP^n$, $p_n(F): FP^n \rightarrow S^{dn}$, $h_n: CP^{2n+1} \rightarrow HP^n$, $t_n: Q_n \rightarrow \Sigma CP^{2n-1}$ を自然な写像とする。 $q_n = p_n(H)h_n: CP^{2n+1} \rightarrow S^{4n}$; $Q_n = Q_{n-1} \cup_{\omega_{n-1}} e^{4n-1}$; $M^n = S^{n-1} \cup_2 e^n$. $\Sigma CP^{n-1} \subset SU_n \subset SO_{2n} \subset$

$\Omega^{2n} S^{2n}$ の adjoint map $g_n: \Sigma^{2n+1} \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow S^{2n}$ が S^1 -transfer map で、
 $g_2 = \nu_4$, $\Sigma(g_n \circ \Sigma^{2n+1} \gamma_{n-1}) = [\iota_k, \iota_k]$, $k = d(n+1) - 1$ となる。
 S^3 -transfer map $g_n(\mathbb{H}): \Sigma^{4n} \mathbb{Q}_n \rightarrow S^{4n}$ も同様。 $g_{2n}(\mathbb{C}) \circ \Sigma^{4n} t_n = g_n(\mathbb{H})$.

以下、記号 F 、特に、 \mathbb{C} は省略する。我々は次の2つの自然な cofibrations を用いる。

$$(1) \quad S^{2n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} P^{n-1} \xrightarrow{i} P^n \xrightarrow{p} S^{2n} \rightarrow \dots;$$

$$(2) \quad \mathbb{C}P^{2n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \mathbb{H}P^{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathbb{Q}_n \xrightarrow{t_n} \Sigma \mathbb{C}P^{2n-1} \rightarrow \dots$$

定義より、次の等式が成り立つ。

$$(3) \quad \gamma_{2n} = (-1)^{n+1} t_n \omega_n; \quad q_n \gamma_{2n+1} = n \nu_{4n}.$$

Lemma 1 ([T1]) $\pi_{2n}^S(P^n) = \mathbb{Z}\{\zeta_n\} \oplus i_* \pi_{2n}^S(P^{n-1})$, $\pi_{2n}^S(P^{n-1})$ は有限。
 $\#(\Sigma^k \gamma_n) = (n+1)!$, $k \geq 1$.

Lemma 2. $n \geq 2$ とする。 $12/(12, n+1) t_n \omega_n = \Sigma \gamma_{2n-1} \circ \gamma_{4n}^2 + i\alpha$ を満たす元 $\alpha \in \pi_{4n+2}(\Sigma P^{2n-2})$ が存在する。 $(2n+1)!(12, n+1)/12 \mid \#\alpha$. 特に、 $n = 2$ のときは、 $\Sigma^2 \alpha = i\sigma''$.

Lemma 3. $\gamma_3 \eta^2 = 4t_2 \omega_2 + 8i\sigma$; $\tilde{\eta}' \eta^2 = 4\omega_2 + 8i\sigma$, $\tilde{\eta}' \in \langle i, 2\nu, \eta \rangle$;
 $t_2 \tilde{\eta}' = \gamma_3 \pm i\nu$, $\tilde{\nu} \in \langle i, \eta, \nu \rangle$; $t_2 \tilde{\eta}' \eta = \gamma_3 \eta + i\nu^2$.

Remark (Morisugi). $\pi_{8k+1}^S(P^{4k})$ で、 $(4k+1)!/2\gamma_{4k} = i\alpha_k \cdot \alpha_k = pA^k i \in$

$\pi_{8k-1}^S(S^0)$, $A: M^{n+8} \rightarrow M^n$ は Adams map. $\zeta_n^{\eta} 2n+1 = (n+1)!/2\Sigma\gamma_n$.

古典群と SU_{2m}/Sp_n の準安定ホモトピー群の結果 ([M], [M-T]) に、James splitting を使えば、次が得られる。

Lemma 4. $t_n \omega_n^{\eta} = (n, 24)\gamma_{2n-1}^{\nu}$. $(24, n+2)\omega_n^{\nu} = 0$.

Theorem A の generators の記号の説明 ; $\widehat{2\nu}^! = t_3(\widehat{2\nu}^{\prime} - 2i\sigma)$, $\widehat{2\nu}^{\prime} \in \langle i, \overline{2\nu}, \widehat{2\nu} \rangle \subset \pi_{14}^S(Q_3)$, $\overline{2\nu}$, $\widehat{2\nu}$ は ν に関する (co-)extension; $\tilde{\sigma}^{\prime} = t_2 \tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma} \in \langle i, 2\nu, \sigma \rangle$; $\tilde{\nu} = t_2 \tilde{\nu}^{\prime}$, $\tilde{\nu}^{\prime} \in \langle i, 2\nu, \bar{\nu} \rangle$; $\tilde{\nu}^{\prime\prime} \in \langle i, \gamma_5, \nu \rangle$; $\tilde{\mu} = t_2 \tilde{\mu}^{\prime}$, $\tilde{\mu}^{\prime} \in \langle i, 2\nu, \mu \rangle$; 残りは後で、説明する。

§ 2. 主目的から得られる結果を、初めに紹介する。 $M(X) = \{X, X\}$, $\varepsilon(X)$ を空間 X の安定自己ホモトピー同値類の群とする。

Theorem 1. $2 \leq n \leq 6$ のとき、 $M(P^n) \cong \mathbb{Z}^n$; $\varepsilon(P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. $M(P^7) \cong \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$; $\varepsilon(P^7) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$.

証明の概要。 $n = 2$ は、Oka、 $n = 3$ は、Yamaguchi の結果である。
 $M(P^n)$ については省略。記号: ι_n^{\prime} を P^n の identity map を表わす。

Barcus-Barratt(または Oka-Sawashita-Sugawara)の完全列を考える;

$$i_* \pi_{2n}^S(P^{n-1}) \xrightarrow{\lambda} \varepsilon(P^n) \xrightarrow{i^*} \varepsilon(P^{n-1}) \longrightarrow 0.$$

ここで、 $\lambda(i\alpha) = \iota_n^{\prime} + i\alpha p$, $i^*(\beta) = \beta|_{P^{n-1}}$ (restriction) である。

$$\pi_8^S(P^3) = \mathbb{Z}_2\{i\nu^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_3^{\eta}\}; \pi_{10}^S(P^4) = 0; \pi_{12}^S(P^5) = \mathbb{Z}_3\{i\beta_1\};$$

$\pi_{14}^S(P^6) = \mathbb{Z}_2\{\tilde{i}\tilde{\nu}\}$ となるので、 $i\nu^2 \in \Sigma\gamma_{\frac{3}{5}}^*(\Sigma P^3, P^4)$, $i\beta_1 \in \Sigma\gamma_{\frac{3}{5}}^*(\Sigma P^5, P^6)$ 及び $i\tilde{\nu} \in \Sigma\gamma_{\frac{3}{6}}^*(\Sigma P^6, P^7)$ を言えばよい。(3) より、 $i\nu^2 = i\nu(q_1\gamma_3) \in \Sigma\gamma_{\frac{3}{5}}^*(\Sigma P^3, P^4)$ である。 $\alpha_1 = 8\nu$ を $\pi_3^S(S^0)$ の 3-成分の生成元とする。 $\alpha_1 q_1 \gamma_3 = \alpha_1 \nu = 0$ だから、 $\alpha_1 q_1$ は P^4 へ拡張でき、 $\pi_k^S(S^1)$ は、 $k = 9, 10$ のとき、2-torsion だから、これは P^5 へ拡張できる。これらを $\delta \in \pi_S^1(P^4)$, $\delta' \in \pi_S^1(P^5)$ とおく。

$\#\Sigma^k(\gamma_3\nu_7) = 4$, $k \geq 0$; $\#j_{3*}(\Sigma\gamma_3 \circ \nu_8) = 4$, $j_n: \Sigma P^n \subset SU_{n+1}$ であるから、 $\{i, \Sigma\gamma_3, 4\nu_8\} \subset \pi_{12}(\Sigma P^4)$ が well-defined で、 $\alpha \in \{i, \Sigma\gamma_3, 4\nu_8\}$ に対して、 $\pi_{12}(SU_5) = \mathbb{Z}_{360}\{j_4\alpha\}$. $\pi_{12}(SU_6) = \mathbb{Z}_6!\{j_5\Sigma\gamma_5\}$, $2j_5\Sigma\gamma_5 = j_5i\alpha$. 故に、James splitting より、stable で、 $2\gamma_5 = i\alpha$.

さて、 $\delta' \circ 4\gamma_5 = 2\delta\alpha \in 2\delta\langle i, \gamma_3, 4\nu \rangle \subset \langle \alpha_1 q_1, \gamma_3, 8\nu \rangle \subset \langle \alpha_1, \nu, \alpha_1 \rangle \ni \beta_1 \pmod{0}$. 以上で、前半が証明された。

$p_7^*: \pi_{15}^S(S^0) \rightarrow \pi_S^{-1}(P^7)$ が monomorphism となることを認めることにする。 $g_8 i\tilde{\nu} = g_4 t_2 \tilde{\nu}' = g_2(\mathbb{H})\tilde{\nu}' \in \langle \nu, 2\nu, \tilde{\nu} \rangle \ni \eta\kappa \pmod{0}$. $\therefore g_8 i\tilde{\nu}_{P_7} = \eta\kappa_{P_7} \neq 0$, $i\tilde{\nu}_{P_7} \neq 0$; $M(P^7) \cong \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$.

$M(P^2) = \mathbb{Z}\{\iota'_2\} \oplus \mathbb{Z}\{\mu_1\}$, $\mu_1 = i\xi_{2P}$; $\varepsilon(P^2) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_2 - \mu_1\}$; $\varepsilon(P^6) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_6 - \mu_1''\}$ ($\mu_1^{(n)} \in M(P^n)$ は $i\mu_1^{(n-1)}$ の extension), $(\mu_1''')^2 = 2\mu_1''$ であることを使う。 $\mu_1^{(4)} = x$ とおく。 $x = ix'$, $x' \in \{P^6, P^5\}$ は μ_1'' の extension にとれ、 $x^2 = 2x + ai\tilde{\nu}_{P^7}$, $a = 0$ or 1 となる。 $g_7 \mu_1'' = 0$ を認めて、 $g_8 x = g_7 x' \in g_7 \langle \mu_1''', \gamma_6, P_7 \rangle = -\langle g_7, \mu_1''', \gamma_6 \rangle_{P_7}$. 故に、 $g_8 x = \alpha_{P_7}$, $\alpha \in \pi_{15}^S(S^0)$ となる。 $\therefore 0 = \alpha_{P_7} ix' = g_8 x^2 = (2\alpha + \eta\kappa)_{P_7}$; $2\alpha + \eta\kappa = 0$. 従って、 $a = 0$ であり、 $\varepsilon(P^7) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_7 - x\}$ となる。

§ 3. 以下、 $\pi_k^S(P)$ の 2-torsion の決定を、 $k = 16, 17$ の場合を例に挙げて、その概要を述べる。これからの議論はすべて、2-torsion で行うも

のとする。 $k \leq 10$ での $\pi_k^S(P^n)$ の結果 [Mu] は、自由に使う。 $\omega_1 = \nu': S^6 \rightarrow S^3$ を出発する cofiber 列 を用いれば、次を得る。

Lemma 5. $\pi_{18}^S(Q_2) = \mathbb{Z}_8\{\tilde{\zeta}\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\eta\kappa\}$, ただし、 $\tilde{\zeta}$ は、 $p_2\tilde{\zeta} = -\zeta$ かつ $\#\tilde{\zeta} = 8$ を満たす任意の元である。

Lemma 6. $\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = 0; \{2\iota_5, \eta_5, \zeta_6\} = 0$.

Proof. よく知られているように、 $\pi_{10}(M^6)$ で $i\nu_5\eta_8^2 \neq 0$ 。一方、

$$i\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = -\{i, 2\iota_5, \eta_5\} \circ \nu_7 = -\{i, 2\iota_5, \eta_5\}_2 \circ \nu_7 \subset -\{i, 2\iota_5, 0\}_2 \ni 0 \pmod{i_*\Sigma^2\pi_8(S^3)} = 0.$$

これで、前半が証明された。後半は、前半と $\zeta_6 \in \{\nu_6, 8\iota_9, 2\sigma_9\}$ なること及び Toda bracket の Jacobi identity より、証明される。

次に、 $\Sigma\omega_2$ をある合成で表わそう。 $\nu' \in \{\eta_3, 2\iota_4, \eta_4\}$ より、extension $\bar{\eta}_3 \in [M^5, S^3]$, coextension $\tilde{\eta}_4 \in \pi_6(M^5)$ が存在して、 $\nu' = \bar{\eta}_3\tilde{\eta}_4$ 。 $\therefore \omega_2 \in \{i, \nu', \nu_6\} = \{i, \bar{\eta}_3\tilde{\eta}_4, \nu_6\}$; $\Sigma\omega_2 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \nu_7\}$ 。 Lemma 6 から、 $\tilde{\eta}_5\nu_7 \in \{i, 2\iota_5, \eta_5\} \circ \nu_7 = -i\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = 0$ 。故に、 $\Sigma\omega_2 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \nu_7\} = \{i\bar{\eta}_4, \tilde{\eta}_5, \nu_7\} \pmod{i_*\pi_{11}(S^4) + \pi_8(\Sigma Q_2) \circ \nu_8} = \pi_8(\Sigma Q_2) \circ \nu_8$ 。結局、 $\Sigma\omega_2 = \bar{\alpha}\tilde{\nu}_7$ と表わせる。ここで、 $\alpha = i\bar{\eta}_4$ で、extension, coextension は、 $\beta = \tilde{\eta}_5$ に関してとる。 $X = M^6 \cup_{\beta} e^8$ とする。

Lemma 7. $\omega_{2\eta}^{10} = i\varepsilon_3 \cdot \omega_{2\eta}^{10\sigma} \omega_{11} = 0$. $\omega_{2\sigma} = 0$. $\omega_{2\varepsilon} = i\eta\kappa$.

Proof. $\omega_{2\eta}^{10} \in -i\{\nu', \nu_6, \eta_9\} \ni i\varepsilon_3 \pmod{0}$. $\omega_{2\sigma} = \bar{\alpha}\tilde{\nu}\sigma$. $\tilde{\nu}\sigma \in \langle i,$

$\tilde{\eta}, \nu \rangle \sigma = -i \langle \tilde{\eta}, \nu, \sigma \rangle \subset i_* \pi_{14}^S(M^2) = 0$. 残りは、省略。

さて、(1) を使って、 $\pi_{16}^S(P)$ を決定しよう。k = 12, 13 のとき、 $\pi_k^S(S^0) = 0$ より、 $\pi_{16}^S(P^2) = \mathbb{Z}_2\{i\sigma^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\kappa\}$. $\gamma_2 \xi = 2i\nu\xi = 0$, $P_3 \gamma_3 = \eta$ より、 $\pi_{16}^S(P^3) \cong \pi_{16}^S(P^2) \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_3 \mu\}$.

Lemma 4, 7 より、 $\gamma_3 \eta^2 \sigma = (4t_2 \omega_2 + 8i\sigma)\sigma = 0$. $\gamma_3 \nu^3 = i\nu\nu^3 = i\nu\eta\bar{\nu} \in i \langle \eta, \nu, \eta \rangle \bar{\nu} \ni i\nu^2 \bar{\nu} = 0 \pmod{0}$. $\therefore \pi_{16}^S(P^4) \cong \pi_{16}^S(P^2)$.

$\nu^2 \in \langle \eta, \nu, \eta \rangle \pmod{0}$ であるから、 ν に関する η の (co-)extension $\bar{\eta}', \tilde{\eta}''$ をとって、 $\nu^2 = \bar{\eta}' \tilde{\eta}''$. $\gamma_4 \bar{\eta}' \in - \langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle \mathbb{P}$.

Lemma 8. $\langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle \ni 0 \pmod{0}$; $\gamma_5 \nu = 0$.

Proof. n = 4, 5 のとき、 $\pi_{14}^S(P^n) = i_* \pi_{14}^S(P^3) = \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\nu}\}$ なる事実は認めることにする。前者を示す。 $\langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle \ni i\tilde{\nu}$ とする。 $g_5 \langle \gamma_4, \eta, \nu \rangle = - \langle g_5, \gamma_4, \eta \rangle \nu \subset \pi_{12}^S(S^0) \nu = 0$. $g_5(i\tilde{\nu}) = g_4 \tilde{\nu} = \eta\kappa$. $g_3 \pi_{14}^S(P^2) = 0$. 後者も同様。

Lemma 8 より、 $\gamma_4 \bar{\eta}' = 0$, $\gamma_4 \nu^2 = 0$. ν^2 の coextension として $\tilde{\nu}^2 = \delta \tilde{\eta}''$, $\delta = \bar{\eta}'$ ととる。 $2\tilde{\eta}'' \in -i \langle \nu, \eta, 2i \rangle = 0$ より、 $\#\tilde{\nu}^2 = 2$. \therefore

$\pi_{16}^S(P^5) \cong \pi_{16}^S(P^2) \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}^2\}$. $\pi_{16}^S(P^6) \cong \pi_{16}^S(P^5) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$ は明らか。

Lemma 3 より、 $\gamma_6 \nu = it_3 \omega_3 \nu = 0$. $\therefore \pi_{16}^S(P^7) \cong \pi_{16}^S(P^5) \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_7 \eta\}$, $\pi_{16}^S(P^8) = \mathbb{Z}\{\xi_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\nu^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\sigma^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\kappa\}$.

次に、 $\pi_{17}^S(P)$ を決定しよう。

Lemma 9. Lemma 5 を満たすある $\tilde{\xi}$ があって、 $\langle \omega_2, \sigma, 16i \rangle \ni \tilde{\xi} \pmod{0}$

$\{16i\rho, i\eta\kappa\}$. $\langle\omega_2, 8i, 2\sigma\rangle$ も同様。

Proof. $\omega_2 = \bar{\alpha}\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}\sigma = 0$ であるから、 $\langle\omega_2, \sigma, 16i\rangle \supset \bar{\alpha}\langle\tilde{\nu}, \sigma, 16i\rangle \subset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \langle\nu, \sigma, 16i\rangle\rangle = \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \xi\rangle \ni \phi \pmod{\omega_2\pi_8^S(S^0) + 16\pi_{18}^S(Q_2) + i\bar{\eta}\circ\pi_{15}^S(M^2) + \pi_7^S(Q_2)\circ\xi} = H$. ここで、 $\pi_7^S(Q_2) = \mathbb{Z}\{\widehat{12i}\}$, $\widehat{12i} \in \langle i, 2\nu, 12i\rangle$. $\widehat{12i}\circ\xi \in \langle i, 2\nu, 12i\rangle\circ\xi \supset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, 12i\rangle\circ\xi \subset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, 12\xi\rangle \ni 12\phi \pmod{12\pi_7^S(Q_2)\circ\xi + i\bar{\eta}\pi_{15}^S(M^2)} = \{12i\widehat{12i}\circ\xi, i\eta\kappa\}$. $p_*\phi = -\xi$. $8\phi \in -i\bar{\eta}\langle\tilde{\eta}, \xi, 8i\rangle = 0$. $\therefore \bar{\eta}\langle\tilde{\eta}, \xi, 8i\rangle \subset \langle 2\nu, \xi, 8i\rangle \ni 0 \pmod{8\rho}$. 故に、 ϕ を Lemma 9 を満たす元 $\tilde{\xi}$ としてよい。Lemma 7 より、 $H = \{i\eta\kappa, 16i\rho, 12\tilde{\xi}\}$.

この証明から分かるように、 $\tilde{\xi}$ として、 $\langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \xi\rangle$ の元を選べばよい。

Lemmas 3, 9 より、 $\tilde{\eta}'\eta\mu \in \tilde{\eta}'\eta\langle\eta, 2i, 8\sigma\rangle \subset \langle\tilde{\eta}'\eta^2, 2i, 8\sigma\rangle \subset \langle 4\omega_2, 2i, 8\sigma\rangle + \langle 8i\sigma, 2i, 8\sigma\rangle \subset \langle 4\omega_2, 8i, 2\sigma\rangle + \langle 8i\sigma, 2i, 8\sigma\rangle \supset 4\langle\omega_2, 8i, 2\sigma\rangle + i\langle 8\sigma, 2i, 8\sigma\rangle \ni 4\tilde{\xi} + 16i\rho \pmod{\pi_{11}^S(Q_2)\circ 2\sigma} = 0$. \therefore

$$(4) \quad \tilde{\eta}'\eta\mu = 4\tilde{\xi} + 16i\rho.$$

さて、 $\pi_{17}^S(P^2) = \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$ は明らか。 $t_2\tilde{\xi} = \tilde{\xi}'$ とおく。(4) と Lemma 3 より、

$$(4)' \quad \gamma_3\eta\mu = 4\tilde{\xi}' + 16i\rho; \quad 4i\tilde{\xi}' = 16i\rho.$$

(2) を用いれば、 $f_1\sigma^2 = i\eta\sigma^2 = 0$, $f_1\kappa = i\eta\kappa$ より、 $\pi_{17}^S(P^3) = \mathbb{Z}_8\{\tilde{\xi}'\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$.

完全列

$$\pi_{17}^S(S^7) \xrightarrow{\gamma_3^*} \pi_{17}^S(P^3) \xrightarrow{i^*} \pi_{17}^S(P^4) \xrightarrow{P^*} \pi_{17}^S(S^8) \longrightarrow \dots$$

において、 $\gamma_3^2 \neq 0$, $\gamma_3 \eta^2 \sigma = 4\tilde{\xi}' + 16i\rho$, $\gamma_3 \eta^2 \sigma = \gamma_3 \nu^3 = 0$.

Lemma 10. coextensions $\widehat{\eta^2 \sigma}$, $\tilde{\nu}^3$ をうまく選んで、 $\#\tilde{\nu}^3 = 2$, $\#\widehat{\eta^2 \sigma} = 64$, $2\widehat{\eta^2 \sigma} = \pm i\tilde{\xi}' \pm i\rho$.

Proof. $2\widehat{\eta^2 \sigma} \in -i\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle$. $p_3\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \subset \langle \eta, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \ni \xi$ より、 $\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \ni \tilde{\xi}' \pmod{i\rho}$. Lemma 9, (4)' より、 $8\langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 2\iota \rangle \subset \langle \gamma_3, \eta^2 \sigma, 16\iota \rangle \supset \langle \gamma_3 \eta^2, \sigma, 16\iota \rangle \subset \langle 4t_2 \omega_2, \sigma, 16\iota \rangle + \langle 8i\sigma, \sigma, 16\iota \rangle \ni 4\tilde{\xi}' + 8i\rho \pmod{\gamma_3 \pi_{10}^S(S^0) + 16\pi_{17}^S(P^3)} = \{4\tilde{\xi}', 16i\rho\}$. $\therefore 16\widehat{\eta^2 \sigma} \equiv 4i\tilde{\xi}' + 8i\rho = \pm 8i\rho \pmod{16i\rho}$. 従って、 $\widehat{\eta^2 \sigma}$ については証明された。

$2\tilde{\nu}^3 \in -i\langle \gamma_3, \nu^3, 2\iota \rangle$. $\langle \gamma_3, \nu^3, 2\iota \rangle \supset \langle \gamma_3 \nu, \nu^2, 2\iota \rangle = \langle \pm i\nu, \langle \eta, \nu, \eta \rangle, 2\iota \rangle$ で、Jacobi identity を使えばよい。

Lemma 10, (4)' より、 $\pi_{17}^S(P^4) = \mathbb{Z}_{64}\{\widehat{\eta^2 \sigma}\} \oplus \mathbb{Z}_8\{\pm i\rho - 2\widehat{\eta^2 \sigma}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}^3\}$.

ω_2 を出発する cofibre 列から得られた次の完全列を考える；

$$\pi_{18}^S(S^{10}) \xrightarrow{\omega_2^*} \pi_{18}^S(Q_2) \xrightarrow{i^*} \pi_{18}^S(Q_3) \xrightarrow{P^*} \pi_{18}^S(S^{11}) \longrightarrow \dots$$

$\tilde{\sigma} \in \langle i, \omega_2, \sigma \rangle$ とおく。Lemma 7, 9 より、 $16\tilde{\sigma} \in -i\langle \omega_2, \sigma, 16\iota \rangle \ni -i\tilde{\xi}' \pmod{16i\rho}$. 故に、 $\tilde{\sigma}$ をうまく選べば、次が成り立つ。

Lemma 11. $16\tilde{\sigma} = -i\tilde{\xi}'$, $\pi_{18}^S(Q_3) = \mathbb{Z}_{128}\{\tilde{\sigma}\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$.

$t_3 \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}'$ とおく。Lemma 10, 11, (4)' より、 $16\tilde{\sigma}' = -i\tilde{\xi}'$, $64\tilde{\sigma}' = 4i\tilde{\xi}' = 16i\rho = 32i\eta^2\sigma$. 故に、(1) より、 $\pi_{17}^S(P^5) = \mathbb{Z}_{128}\{\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\eta^2\sigma - 2\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\nu^3\}$.

Lemma 8 より、 $\gamma_5\nu^2 = 0$. 故に、(1) より、 $\pi_{17}^S(P^6) \cong \pi_{17}^S(P^5)$.

Lemma 12. $8i\tilde{\sigma} = 8a\omega_4 + 16bi\rho$, a : odd. $\pi_{18}^S(Q_4) = \mathbb{Z}_{128}\{\omega_4\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma} - a\omega_4 - 2bi\rho\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$.

Proof. 次の可換図式を考える ;

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{19}(Q_3, Q_2) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{18}(Q_2) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{18}(Q_3) & & \\ \downarrow P_* & & \downarrow j_{2*} & & \downarrow j_{3*} & & \\ \pi_{19}(S^{11}) & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_{18}(Sp_2) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_{18}(Sp_3) & \xrightarrow{P'_*} & \pi_{18}(S^{11}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Mimura-Toda より、 $\pi_{18}(Sp_2) = \mathbb{Z}_8\{[\xi_7]\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\bar{\varepsilon}_3\}$, $\pi_{18}(Sp_3) = \mathbb{Z}_{16}$.

$\Delta'\sigma_{11} = j_2\omega_2\sigma_{10}$, $4P'j_2\omega_2\sigma_{10} = 4\nu\sigma_{10} \neq 0$. $\therefore \pi_{18}(Sp_3) = \mathbb{Z}_{16}\{[8\sigma_{11}]\}$, $2[8\sigma_{11}] = i[\xi_7]$. Toda brackets $\{i, \nu', \xi_6\}$, $\{i, \omega_2, 8\sigma_{10}\}$ は well-defined で、これらの元 $\tilde{\xi}_6''$, θ は j_{2*} , j_{3*} によって、 $[\xi_7]$, $[8\sigma_{11}]$ を hit する。故に、James splitting により、stable で、 $2\theta = i\tilde{\xi}_6''$. $8\tilde{\xi}_6'' \in -i\langle \nu', \xi_6, 8\sigma_{17} \rangle \ni 0 \pmod{0}$. $\therefore \langle 2\nu, \xi, 8\sigma \rangle \ni 0 \pmod{8\rho}$, $\pi_{18}(S^3) = \mathbb{Z}_2\{\bar{\varepsilon}_3\}$, $\bar{\varepsilon} = \eta\kappa$. Lemma 6 より、 $\tilde{\xi}_7'' \in \{i, \bar{\eta}_4\bar{\eta}_5, \xi_7\} \supset \{i\bar{\eta}_4, \bar{\eta}_5, \xi_7\} \pmod{\{i\bar{\varepsilon}_4\} + \pi_8(\Sigma Q_2)\circ\zeta_8}$. 故に、Lemma 9 の証明より、stable で、 $\tilde{\xi}_7'' \in \langle i\bar{\eta}, \bar{\eta}, \xi \rangle \pmod{\{i\eta\kappa, 12\tilde{\xi}\}}$. $\therefore \tilde{\xi}_7'' \equiv \tilde{\xi} \pmod{\{i\eta\kappa\} + \{12\tilde{\xi}\}}$; $i\tilde{\xi}_7'' = xi\tilde{\xi}$, x : odd; $2\theta = -xi\tilde{\xi}$.

(Q_4, Q_3) , (Sp_4, Sp_3) の homotopy 完全列を含む可換図式を考え、

James splitting を使えば、 $8\omega_4 = i\theta$. $\therefore 16\omega_4 = 2i\theta = -xi\zeta$. $\theta \in \langle i, \omega, 8\sigma \rangle \supset \langle i, \omega_2, \sigma \rangle \circ 8\iota \ni 8\tilde{\sigma} \bmod i_*\pi_{18}^S(Q_2) = \{16\tilde{\sigma}, i\rho\}$. つまり、 $\theta = 8c\tilde{\sigma} + d i\rho$, $c: \text{odd}$; $16c\tilde{\sigma} + 2d i\rho = 2\theta = xi\zeta = -16x\tilde{\sigma}$. 故に、Lemma 11 より、 $d = 16e$ で、 $8\omega_4 = 8c i\tilde{\sigma} + 16e i\rho$. $(c, 16) = 1$ より、 $a: \text{odd}$, $ac + 16y = 1$ を満たす a, y が存在する。 $b = ae$ とすれば、関係式が得られる。これは次の短完全列が分裂することを意味する；

$$0 \longrightarrow \pi_{18}^S(Q_3) \xrightarrow{i_*} \pi_{18}^S(Q_4) \xrightarrow{p_*} \pi_{18}^S(S^{15}) \longrightarrow 0.$$

証明終わり。

(1) と Lemma 12 より、 $\pi_{17}^S(P^7) = \mathbb{Z}_{128}\{t_4\omega_4\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - at_4\omega_4 - 2bi\rho\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\tilde{\nu}^2\sigma - 2i\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\nu}^3\}$. これと Lemma 2 より、 $\gamma_7\eta^2 = 4\alpha + w i\tilde{\nu}^3$, $\alpha = i\tilde{\sigma}' - at_4\omega_4 - 2bi\rho$ としてよい。

$\nu_4: S^7 \longrightarrow S^4$ を出発する cofibre 列を使って、次を得る。

Lemma 13. $\pi_{16}^S(\mathbb{H}P^2) = \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}''\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\eta}''\sigma\}$, $\tilde{\nu}'' \in \langle i, \nu, \bar{\nu} \rangle$, $\tilde{\eta}'' \in \langle i, \nu, \eta \rangle$; $\pi_{17}^S(\mathbb{H}P^2) = \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}''^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\eta}''\eta\sigma\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\mu}''\}$, $\tilde{\nu}''^3 = \tilde{\nu}''\eta$, $\tilde{\mu}'' \in \langle i, \nu, \mu \rangle$.

Lemma 13 より、 $\gamma_3(\mathbb{H})\eta^2 = w i\tilde{\nu}''^3$. $\therefore h_3 i\tilde{\nu}''^3 \in i\langle h_2 i', \gamma_3, \nu^3 \rangle = i\langle i'' q_1, \gamma_3, \nu^3 \rangle \subset i\langle i'', \nu, \nu^3 \rangle \ni i\tilde{\nu}''^3 \bmod i_*\pi_8^S(\mathbb{H}P^2)\nu^3 = 0$. $\gamma_3(\mathbb{H})\eta^2 \in \langle i, \gamma_2(\mathbb{H}), \nu \rangle \eta^2 = -i\langle \gamma_2(\mathbb{H}), \nu, \eta \rangle \eta \ni i\tilde{\nu}''^3 \bmod i\tilde{\eta}''\eta\sigma$. $\therefore p_*\langle \gamma_2(\mathbb{H}), \nu, \eta \rangle \subset \langle 2\nu, \nu, \eta \rangle \ni \bar{\nu} \bmod \eta\sigma$, $\text{Ker } p_* = i_*\pi_{16}^S(S^4) = 0$.

故に、 $w: \text{odd}$ で、 $\gamma_7\eta^2 = i\tilde{\nu}''^3 + 4\alpha$. (1) より、次の結果を得る。

Theorem 2. i) $\pi_{17}^S(P^8) = \mathbb{Z}_{128}\{\gamma_8\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - a\gamma_8 - 2bip\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{\widehat{i\eta^2\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'\}$.

ii) $\pi_{17}^S(P^9) = \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - 2bip\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{\widehat{i\eta^2\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'\}$.

Theorem A の記号の説明の続き; $\tilde{\nu}^2 \in \langle i, \gamma_4, \nu^2 \rangle$; $\phi = i\tilde{\sigma}' - 2bip$;
 $\phi = \widehat{i\eta^2\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'$.

§ 4. 最後に、 S^1 -transfer の image を決定しよう。

$B_k = \text{Im} \{g_{n*}: \pi_{k-1}^S(P^{n-1}) \rightarrow \pi_k^S(S^0), k \leq 2n - 1\}$ で、 $B_1 = B_2 = 0$;
 $B_3 = \pi_3^S(S^0)$; $B_4 = B_5 = 0$; $B_6 = \pi_6^S(S^0)$; $B_7 = 2\pi_7^S(S^0)$; $B_8 = \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}\}$; B_9
 $= \mathbb{Z}_2\{\eta^2\sigma\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu^3\}$; $B_{10} = \mathbb{Z}_3\{\beta_1\}$; $B_{11} = \pi_{11}^S(S^0)$ であった。 $B_{12} = 0$.

Theorem B. $B_{13} = \mathbb{Z}_3\{\alpha_1\beta_1\}$; $B_k = \pi_k^S(S^0)$, $k = 14, 19$; $B_{15} =$
 $\mathbb{Z}_{240}\{2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta\kappa\}$; $B_{16} = \mathbb{Z}_2\{\omega^*\}$; $B_{17} = \mathbb{Z}_2\{\eta\omega^*\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta^2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu\kappa\}$;
 $B_{18} = \mathbb{Z}_8\{\nu^*\}$, ここに、 $\omega^* = \eta^* + a\rho$, $a = 0$ または 1 である。

証明の概要。Theorem 1 の証明より、 $g_4\tilde{\nu} = \eta\kappa$ であった。 $g_n \xi_{n-1}$ は complex J-homomorphism の image の生成元であることを思い出せば、 $g_8\xi_7 = 2\rho$, $g_9\xi_8 = \eta^2\rho$, $g_{10}\xi_9 = \xi$. $\therefore B_{15} = \mathbb{Z}_{240}\{2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta\kappa\}$.

Lemma 14. $g_4\tilde{\sigma}' = \sigma^2$; $g_6\widehat{2\nu} \equiv \kappa \pmod{\sigma^2}$.

Proof. $g_4\tilde{\sigma}' = g_4t_2\tilde{\sigma} = g_2(\mathbb{H})\tilde{\sigma} \in \langle \nu, 2\nu, \sigma \rangle \ni 0 \pmod{\sigma^2}$. 一方、 $\langle i, 2\nu, \sigma \rangle = \Sigma^\infty\{i, 2\nu_{10}, \sigma_{13}\}$ より、 $\tilde{\sigma} = \Sigma^\infty\tilde{\sigma}_{13}$, $\tilde{\sigma}_{13} \in \{i, 2\nu_{10}, \sigma_{13}\}$ としてよい。 $H: \pi_{22}(S^8) \rightarrow \pi_{22}(S^{15})$ を Hopf homomorphism とすれば、
 $H(g_2(\mathbb{H})\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13}) = H(g_2(\mathbb{H}))\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13} = \pm p\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13} = \pm \sigma_{15}$. $\therefore g_2(\mathbb{H})\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13} \equiv$

$$\pm \sigma g_{15}^{\sigma} \bmod \Sigma \pi_{21}(S^7) = \{\Sigma \sigma' \circ \sigma_{15}, \kappa_8\}. \therefore g_4^{\tilde{\sigma}'} = \sigma^2.$$

$$g_6^{\tilde{2\nu}'} = g_6 t_3(\tilde{2\nu}' - 2i\sigma) = g_3(H)\tilde{2\nu}' \in \langle \nu, \overline{2\nu}, \tilde{2\nu} \rangle \equiv \langle \nu, 2\nu, \nu, 2\nu \rangle \ni \kappa \bmod \sigma^2. \therefore g_6^{\tilde{2\nu}'} \equiv \kappa \bmod \sigma^2.$$

$$\text{Lemma 15. } g_4^{\tilde{\mu}} = 0; g_7^{\tilde{\nu}''} = \omega^*; g_7^{\tilde{\sigma}'} = \nu^*; g_3^{\tilde{\sigma}^2} = \bar{\sigma}.$$

Proof. $g_4 = \pm \sigma p \pm \bar{\nu}$, $\bar{\nu}: g_2 = \nu$ の extension であり、 $0 = g_4 \gamma_3 = \sigma \eta + \bar{\nu} \gamma_3$ より、 $\bar{\nu} \gamma_3 = \eta \sigma$. $\tilde{\mu} \in \langle \gamma_3, 8\sigma, 2\nu \rangle \bmod \gamma_3 \pi_8^S(S^0) + 2\pi_{16}^S(S^0) + i_* \pi_{15}^S(P^2) = \{\gamma_3 \eta \sigma, \gamma_3 \bar{\nu}\} + \{i \langle i', \eta, \zeta \rangle\}$ より、 $g_4^{\tilde{\mu}} = \sigma \mu + \bar{\nu} \tilde{\mu}$, $\bar{\nu} \tilde{\mu} \in \langle \eta \sigma, 8\sigma, 2\nu \rangle \ni \eta \rho = \sigma \mu \bmod \langle \nu, \eta, \zeta \rangle = 0$. $\therefore \eta \langle \nu, \eta, \zeta \rangle = - \langle \eta, \nu, \eta \rangle \ni \zeta \ni \nu^2 \zeta = 0 \bmod 0$. $\therefore g_4^{\tilde{\mu}} = 0$.

$g_7^{\tilde{\nu}''} \in \langle g_6, \gamma_5, \nu \rangle = \Sigma^\infty \{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15} \gamma_5, \nu_{26}\}_1 \cdot H\{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15} \gamma_5, \nu_{26}\}_1 \ni \pm \nu_{27}$. [T2] の Lemma 12.15 より、 $H(\omega_{14}) = \nu_{27}$ となる元 $\omega_{14} \in \pi_{30}(S^{14})$ が存在する。 $\therefore \{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15} \gamma_5, \nu_{26}\}_1 \ni \pm \omega_{14} \bmod \Sigma^2 g_6 \circ \pi_{30}(\Sigma^{15} P^4) + \pi_{27}(S^{14}) \circ \nu_{27} + \Sigma \pi_{29}(S^{13})$. $\therefore g_7^{\tilde{\nu}''} \equiv \omega \bmod g_6 \pi_{15}^S(P^4) + \{\eta \rho\} = \{\eta \rho\}$. $\therefore i_* \pi_{15}^S(P^4) = Z_2\{i \tilde{\mu}\}$, $i: P^4 \subset P^8$ は認めることにする。 $\omega \equiv \eta^* \bmod \eta \kappa$ より、第2の主張を得る。第3の主張の証明は略す。

$$g_3^{\tilde{\sigma}^2} \in \langle \nu, \eta, \sigma^2 \rangle \subset \langle \nu, \eta \sigma, \sigma \rangle \ni \bar{\sigma} \bmod 0. \text{ 証明終わり。}$$

Remark. Knapp によれば、 S^1 -transfer の image に入らない元は、次の通りである： μ -series $\mu_r, \eta m_r, r \geq 0$; $\rho_r, \eta \rho_r, r \geq 1$, ρ_r は J -image $\pi_{8r-1}^S(SO)$ の 2-成分の生成元である。

Conjecture. S^1 -transfer の image に入らない元は、本質的に、上記の Knapp が指摘した元のみである。

References

- [B-B] W. D. Barcus and M. G. Barratt, On the homotopy classification of the extension of a fixed map, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88(1958), 57-74.
- [J] I. M. James, *The topology of Stiefel manifolds*, London Math. Soc. Lecture Note, 24(1976), Cambridge.
- [K] K. Knapp, *Some applications of the K-theory to framed cobordism: e-invariant and transfer*, Habilitationsschrift, Bonn, 1979.
- [M] M. Mimura, *Quelques groupes d'homotopie metastables des espaces symmetriques $Sp(n)$ et $U(2n)/Sp(n)$* , *C. R. Acad. Paris*, 262(1966), 20-21.
- [M-T] M. Mimura and H. Toda, *Homotopy groups of symplectic groups*, *J. Math. Kyoto Univ.*, 3(1964), 217-50.
- [Mo] R. E. Mosher, *Some stable homotopy of complex projective space*, *Topology*, 7(1968), 179-93.
- [Mu] J. Mukai, *The S^1 -transfer map and homotopy groups of suspended complex projective spaces*, *Math. J. Okayama Univ.*, 24(1984), 179-200.
- [T1] H. Toda, *A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups*, *mem. Coll. Sci. Kyoto Univ.*, 32(1959), 103-19.
- [T2] H. Toda, *Composition methods in homotopy groups of spheres*, *Ann. of Math. Studies*, 49(1962), Princeton.

あとがき。

以上が、本研究集会当日に用意していた原稿であるが、今読み返してみると、記述不足や誤りがある。ここでは、次の3点について、注意する。

1. p. 3. Theorem 1 の証明において、 $i^*: \varepsilon(P^n) \rightarrow \varepsilon(P^{n-1})$ は onto としたが、一般には、 $n \geq 3$ のとき、 $\text{Im } i^* = \{ \alpha \in \varepsilon(P^{n-1}) \mid \alpha \gamma_{n-1} = \pm \gamma_{n-1} \}$ [B-B] である。これ以外の証明は通用するので、 $3 \leq n \leq 6$ のとき、 i^* は onto で、 $\varepsilon(P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ となる。Theorem 1 に変更はない。

2. p. 11. Theorem A の記号の説明；より正確には、 $\phi = i\sigma$ ， $\psi = i\eta \widehat{2}\sigma$ としてよい。 $2\psi = \pm i\rho$ となる。

3. p. 12. 講演の中で、教えていただいたことであるが、 $\langle \psi, 2\psi, \sigma, 2\sigma \rangle$ という Kervaire invariant 1 の元は（証明は知らないが） S^1 -transfer の image ではないとのことで、Conjecture には反例がある。

以上 (1992.1.8)