

分類空間のホモトピー論

(最近の話題から)

高知大学・理 逸見 豊 (Yutaka Hemmi)

1 Introduction

代数的位相幾何学において分類空間のホモトピー論に関する研究は重要なテーマの一つである。ここでは特に多項式環の空間のコホモロジーとしての実現問題について最近の進展を解説することにする。

以下 p を素数とし、

$$H^* = \mathbb{Z}/p[x_1, \dots, x_k], \quad \deg x_i = 2n_i \quad (n_1 \leq \dots \leq n_k)$$

とする。 (n_1, \dots, n_k) を H^* の type, k を H^* の rank とよぶ。また $n_1 \dots n_k \equiv 0 \pmod p$ のとき H^* は modular 多項式環とよばれ, $n_1 \dots n_k \not\equiv 0 \pmod p$ のとき non-modular 多項式環とよばれる。

さて H^* が実現可能であるとは空間 X で, 環として $H^*(X; \mathbb{Z}/p) \cong H^*$ となるものが存在するときをいう。問題の出発点は Steenrod ([Ste61]) による。

問題 すべての実現可能な多項式環の type を分類せよ。

多項式環を実現する空間の典型的な例としてはコンパクト Lie 群の分類空間がある。すなわちコンパクト Lie 群 G に対し, もし $H_*(G; \mathbb{Z})$ が p -torsion をもたなければ, G の分類空間 BG の \mathbb{Z}/p 係数コホモロジー環 $H^*(BG, \mathbb{Z}/p)$ は有限生成多項式環になる。さらに次のことが知られている。

定理 1.1 (Borel [Bor57]) G をコンパクト Lie 群, T をその極大トーラスとし, $i: BT \rightarrow BG$ を包含写像 $T \subset G$ から誘導される写像とする。今 G の Weyl 群 W の位数 $|W|$ が p で割れないならば, 次の自然な準同型写像は同型になる。

$$i^*: H^*(BG; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z}/p)^W$$

ただし $H^*(BT; \mathbb{Z}/p)^W$ は $H^*(BT; \mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p[t_1, \dots, t_k]$ ($\deg t_i = 2$) の W の作用による不変式である。さらにこのとき $H^*(BG, \mathbb{Z}/p)$ は多項式環となり,

$$H^*(BG, \mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p[x_1, \dots, x_k], \quad \deg x_i = 2n_i$$

とすると $|W| = n_1 \dots n_k$ が成り立つ。

問題へのアプローチは上の定理を一般化するという方向で行われてきた。

2 Rank 1 の場合

まず rank 1 の場合, すなわち

$$H^* = \mathbb{Z}/p[x], \quad \deg x = 2n$$

のときを考える.

いま $H^* \cong H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ なる空間 X が存在するとする. このとき簡単に分かるように

$$H^*(\Omega X; \mathbb{Z}/p) = \Lambda(y), \quad \deg y = 2n - 1$$

が成り立つ. よって H^* が実現可能であることと $2n - 1$ 次元球面 S^{2n-1} が mod p ループ空間になることが同値であるのが分かる. rank 1 の場合は mod p Hopf 不変量と深く関係がある.

定理 2.1 ([Ada60], [Gon78], [Sul71]) $H^* = \mathbb{Z}/p[x]$ ($\deg x = 2n$) が実現可能である必要十分条件は $n = 1, 2, 4$ ($p = 2$), $n \mid p - 1$ (p : 奇素数) である.

$n \mid p - 1$ (p : 奇素数) のとき H^* が実現可能であることの証明は Sullivan によるが, 彼は実際に H^* を実現する空間を構成している. その構成は定理 1.1 の方法と類似している. 今 $n \mid p - 1$ とする. このとき $W = \mathbb{Z}/n$ は p -進整数環 \mathbb{Z}_p^\wedge の単数群 $(\mathbb{Z}_p^\wedge)^\times \cong \mathbb{Z}/p - 1$ の部分群になる. よって W は BS^1 の p -完備化 $BS_p^{1\wedge} = K(\mathbb{Z}_p^\wedge, 2)$ に作用する. そこで

$$X = EW \times_W BS_p^{1\wedge} \quad (EW \text{ は可縮な自由 } W \text{ 複体})$$

とおけば, 自然な写像 $i: BS_p^{1\wedge} \simeq EW \times BS_p^{1\wedge} \rightarrow X$ に対して

$$i^*: H^*(X; \mathbb{Z}/p) \cong H^*(BS_p^{1\wedge}; \mathbb{Z}/p)^W \cong H^*$$

が成り立つ.

3 Clark-Ewing の方法

Clark-Ewing は Sullivan の方法を一般化することを考えた. すなわち多項式環が不変式として与えられるための条件と, それを実現されるための条件を non-modular 多項式環に関して考えた.

W を一般線形群 $GL(k, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ の有限部分群とする. いま W は $BT_p^{k\wedge}$ (T^k は k 次元トーラス) に自然に作用する. ここで rank 1 のときと同様に p -完備空間 $X(W)$ および $i: BT_p^{k\wedge} \rightarrow X(W)$ を次で定義する.

$$i: BT_p^{k\wedge} \simeq EW \times BT_p^{k\wedge} \rightarrow EW \times_W BT_p^{k\wedge} = X(W).$$

このとき次が成り立つ.

補題 3.1 $|W| \not\equiv 0 \pmod p$ ならば次の写像は同型写像になる.

$$i^* : H^*(X(W), \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)^W \cong \mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W \quad (\deg t_i = 2)$$

$|W|$ が p で割れるときは上の定理は正しくないことに注意する.

さて次に考えることは不変式 $\mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W$ が多項式環になるための条件を決定することである.

定理 3.2 ([CE74]) 位数が p と素な $GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ の有限部分群 W に対し, 次の 3 条件は同値である. ただし \mathbf{Q}_p^\wedge は p 進数体であり, (1), (3) における W の作用は自然な写像 $\mathbf{Z}_p^\wedge \rightarrow \mathbf{Z}/p$, $\mathbf{Z}_p^\wedge \subset \mathbf{Q}_p^\wedge$ から誘導されたものとする.

- (1) $\mathbf{Z}_p^\wedge[t_1, \dots, t_k]^W \cong \mathbf{Z}_p^\wedge[x_1, \dots, x_k]$ ($\deg x_i = 2n_i$).
- (2) $\mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W \cong \mathbf{Z}/p[x_1, \dots, x_k]$ ($\deg x_i = 2n_i$).
- (3) $\mathbf{Q}_p^\wedge[t_1, \dots, t_k]^W \cong \mathbf{Q}_p^\wedge[x_1, \dots, x_k]$ ($\deg x_i = 2n_i$).

しかもこのとき $n_1 \dots n_k = |W|$ が成り立つ.

上の定理より $\mathbf{Q}_p^\wedge[t_1, \dots, t_k]^W$ が多項式環になる W を決定すればよい. これについては次が成り立つ.

定理 3.3 $GL(k, \mathbf{Q}_p^\wedge)$ の有限部分群 W に対し, $\mathbf{Q}_p^\wedge[t_1, \dots, t_k]^W$ が多項式環になるための必要十分条件は W が pseudoreflexion 群になること, すなわち W が $\text{rank}(\rho - 1) \leq 1$ であるような元 $\rho \in GL(k, \mathbf{Q}_p^\wedge)$ で生成されることである.

定理 3.2 と定理 3.3 より不変式 $\mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W$ が多項式環になるような W を分類することと p -進 pseudoreflexion 群 (すなわち $GL(k, \mathbf{Q}_p^\wedge)$ の pseudoreflexion 部分群) を分類することが同値になる.

さて p -進 pseudoreflexion 群は自然な包含写像 $GL(k, \mathbf{Q}_p^\wedge) \subset GL(k, \mathbf{C})$ により複素 pseudoreflexion 群と見なせる. 一方複素 pseudoreflexion 群は Shephard-Todd [ST54] により完全に分類されている. それでは複素 pseudoreflexion 群はいつ p -進 pseudoreflexion 群となるか. これについては次が成り立つ.

定理 3.4 ([CE74]) 有限位数の pseudoreflexion 部分群 $W \subset GL(k, \mathbf{C})$ に対し, $GL(k, \mathbf{Q}_p^\wedge)$ の pseudoreflexion 部分群で $GL(k, \mathbf{C})$ において W と共役であるものが存在する必要十分条件は, 包含写像 $W \subset GL(k, \mathbf{C})$ の指標体が p -進数体 \mathbf{Q}_p^\wedge に含まれることである.

上の定理より Clark-Ewing は複素 pseudoreflexion 部分群の分類結果を用いて, 不変式 $\mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W$ として実現可能な non-modular 多項式環の type を分類した. (p.10)

4 Adams-Wilkerson の定理

次に問題になることは Clark-Ewing の構成以外に実現可能な non-modular 多項式環が存在するのかということである。これに関して Adams-Wilkerson は Clark-Ewing の構成が実現可能な non-modular 多項式環すべてを分類していることを示した。次にこれについて解説する。

$\mathcal{A}_{(p)}$ を mod p Steenrod 代数とする。ここで $\mathcal{A}_{(p)}$ 上の次数付き多元環 A^* が unstable であるとは、任意の $x \in A^*$ に対して次の unstable 条件がみたされるときをいう。すなわち

$$\mathcal{P}^t x = \begin{cases} x^p & (\deg x = 2t) \\ 0 & (\deg x < 2t) \end{cases}, \quad \beta \mathcal{P}^t x = 0 \quad (\deg x \leq 2t) \quad (p \text{ 奇素数})$$

$$Sq^t x = \begin{cases} x^2 & (\deg x = t) \\ 0 & (\deg x < t) \end{cases} \quad (p = 2)$$

明らかに実現可能な多項式環は unstable $\mathcal{A}_{(p)}$ -多元環になる。

定理 4.1 ([AW80]) H^* を non-modular 多項式環で unstable $\mathcal{A}_{(p)}$ -多元環の構造を持つとする。このとき有限部分群 $W \subset GL(k, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ で

$$H^* \cong \mathbb{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W \quad (\deg t_i = 2)$$

をみたすものが存在する。よって特に与えられた non-modular 多項式環が実現可能である必要十分条件はその type が Clark-Ewing 表 (p.10) から得られることである。

さて以後の話の都合上 Adams-Wilkerson の証明のあらすじを見てみよう。彼等はまず unstable $\mathcal{A}_{(p)}$ -多元環 A^* で $A^{\text{odd}} = 0$ をみたすものからなる category を考えた。その category における H^* の代数閉包 K^* を考える。このとき K^* はトーラスの分類空間のコホモロジー環 $H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$ と同型になることを示した。よって特に $\mathcal{A}_{(p)}$ -部分多元環としての埋め込み

$$H^* \subset H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$$

を得る。

次に H_{sep}^* を H^* を含む $H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$ の最小部分 Hopf 代数とする。($H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$ の Hopf 代数構造は $BT_p^{k\wedge} = K((\mathbb{Z}_p^\wedge)^k, 2)$ のループ構造で与えられている。) $GL(k, \mathbb{Z}/p) = \text{Aut}(H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p))$ の部分群 W を次で定める。

$$W = \{ \alpha \in GL(k, \mathbb{Z}/p) \mid \text{すべての } x \in H^* \text{ に対し } \alpha x = x \}. \quad (*)$$

このとき次が成り立つ。

$$(H_{sep}^*)^W \cong H^*.$$

ここまでは H^* が non-modular であるという仮定は用いていない。

補題 4.2 ([AW80]) W の位数が p と素であれば,

$$H_{sep}^* = H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)$$

が成り立つ。よって

$$H^* \cong \mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W \quad (n_1 \dots n_k = |W|)$$

となる。

さて上の議論では W は $GL(k, \mathbf{Z}/p)$ の部分群であった。よって W を $GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ の部分群として実現しなくてはならない。しかしこれは容易である。実際定義より $\mathbf{Z}_p^\wedge = \varprojlim \mathbf{Z}/p^r$ であり、射影 $GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge) \rightarrow GL(k, \mathbf{Z}/p)$ の核は p -群になる。よって $|W| \not\equiv 0 \pmod p$ より包含写像 $W \subset GL(k, \mathbf{Z}/p)$ は $GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ への写像として持ち上がるのである。これにより定理 4.1 を得る。

5 Modular 多項式環

次に modular 多項式環の場合を考える。この場合に non-modular の場合と同じ議論を展開するための障害となるものは次の 3 点である。

- (1) $GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ の有限部分群 W の位数が p の倍数のとき、必ずしも

$$H^*(X(W), \mathbf{Z}/p) \cong H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)^W$$

となるとは限らない。すなわち不変式 $\mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W$ が多項式環になってもそれが実現できるとは限らない。

- (2) $H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)$ の部分多元環である modular 多項式環 H^* に対して、

$$H_{sep}^* = H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)$$

となるとは限らない。

- (3) $GL(k, \mathbf{Z}/p)$ の有限部分群 W の位数が p の倍数のとき、包含写像 $W \rightarrow GL(k, \mathbf{Z}/p)$ の持ち上げ

$$W \rightarrow GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$$

があるとは限らない。

さて上の (2), (3) に対して、最近 Dwyer-Miller-Wilkerson の 3 人はたとえ H^* が modular 多項式環であっても、それが実現可能であれば non-modular のときと同様なことが成り立つことを示した。彼等はその証明に Lannes の T -関手を用いている。そこで次の節では Lannes の T -関手について復習することにする。

6 Lannes の T -関手

p を固定された素数とし, \mathcal{K} を unstable $\mathcal{A}_{(p)}$ -多元環の category とする. Lannes ([Lan87]) は elementary abelian p 群 V に対し, 関手

$$R \in \text{Obj } \mathcal{K} \implies H^*(BV; \mathbb{Z}/p) \otimes R$$

の左随伴関手

$$T^V : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \quad \text{Mor}_{\mathcal{K}}(T^V(R), S) \cong \text{Mor}_{\mathcal{K}}(R, H^*(BV; \mathbb{Z}/p) \otimes S)$$

を構成した. さらにこの関手は完全列と tensor 積を保存する.

さて上の対応で $S = \mathbb{Z}/p$ のときを考えると, 任意の $\mathcal{A}_{(p)}$ 準同型 $\varphi : R \rightarrow H^*(BV; \mathbb{Z}/p)$ に対しその随伴写像 $T^V(R) \rightarrow \mathbb{Z}/p$ を得る. これは $T^V(R)$ の 0 次からの写像 $T^V(R)^0 \rightarrow \mathbb{Z}/p$ が与えられたのと同値である. そこでこの写像により \mathbb{Z}/p を $T^V(R)^0$ -加群とみなして

$$T^V_{\varphi}(R) = T^V(R) \otimes_{T^V(R)^0} \mathbb{Z}/p$$

と定義する.

次に空間 X に対して, 評価写像 $e : BV \times \text{Map}(BV, X) \rightarrow X$ から定まる準同型

$$e^* : H^*(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(BV; \mathbb{Z}/p) \otimes H^*(\text{Map}(BV, X); \mathbb{Z}/p)$$

を考え, これの随伴写像

$$\lambda : T^V(H^*(X; \mathbb{Z}/p)) \rightarrow H^*(\text{Map}(BV, X); \mathbb{Z}/p)$$

を考える. ただし $\text{Map}(BV, X)$ は BV から X への (必ずしも基点を保たない) 写像全体の空間である. 特に任意の写像 $f : BV \rightarrow X$ に対し $\text{Map}(BV, X)_f$ を $\text{Map}(BV, X)$ の f を含む成分とすると, 上の写像は準同型写像

$$\lambda_f : T^V_f(H^*(X; \mathbb{Z}/p)) \rightarrow H^*(\text{Map}(BV, X)_f; \mathbb{Z}/p)$$

を誘導する. (ただし $T^V_f = T^V_f$ とする.) このとき Lannes は次の事実を示した.

定理 6.1 ([Lan87]) (1) X を単連結な p 完備空間とする. さらに $H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ は有限型であると仮定する. このとき自然な写像

$$[BV, X] \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(H^*(X; \mathbb{Z}/p), H^*(BV; \mathbb{Z}/p)) \cong \text{Mor}_{\mathcal{K}}(T^V(H^*(X; \mathbb{Z}/p)), \mathbb{Z}/p)$$

は全単射になる. さらに任意に $f : BV \rightarrow X$ を固定したとき, $T^V_f(H^*(X; \mathbb{Z}/p))$ が有限型で $T^V_f(H^*(X; \mathbb{Z}/p))^1 = 0$ であれば

$$\lambda_f : T^V_f(H^*(X; \mathbb{Z}/p)) \rightarrow H^*(\text{Map}(BV, X)_f; \mathbb{Z}/p)$$

は同型写像になる.

(2) G が compact 連結 Lie 群とし, $\text{Rep}(V, G)$ を準同型写像 $V \rightarrow G$ の共役類全体 $\text{Hom}(V, G)/\text{Inn } G$ とする. このとき自然な対応

$$\text{Rep}(V, G) \rightarrow [BV, BG]$$

は全単射になる.

7 Dwyer-Miller-Wilkerson の定理

さて modular 多項式の実現に関する Dwyer-Miller-Wilkerson の結果を見てみよう.

定理 7.1 ([DMW]) p を奇素数とする. もし H^* が実現可能ならばそれはある pseudoreflexion 群 $W \subset GL(k, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ による不変式 $\mathbb{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W$ と同型になる. よって H^* の type は Clark-Ewing 表から得られる.

彼等の証明の方法は次のようである.

H^* が実現可能な modular 多項式とする. いま Adams-Wilkerson の結果より, H^* を含む $H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p[t_1, \dots, t_k]$ の最小の部分 Hopf 代数 H_{sep}^* に対して

$$(H_{sep}^*)^W \cong H^*$$

が成り立つ. non-modular の場合には純粋に代数的な理由により $H_{sep}^* = H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$ が示された. 一方 modular の場合にも H^* が実現可能という条件のもとで同様のことがわかる. 実際 X を H^* を実現する p 完備空間とする. すなわち

$$H^*(X; \mathbb{Z}/p) \cong H^*.$$

V を位数 p の元からなる $T_p^{k\wedge}$ の部分群とし, $i: V \rightarrow T_p^{k\wedge}$ を包含写像とする. このとき $Bi^*: H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(BV; \mathbb{Z}/p)$ は単射になる. 一方, 定理 6.1 より Bi^* の H^* への制限写像はある写像 $f: BV \rightarrow X$ によって $f^* = Bi^* | H^*$ で与えられている. そこで Dwyer-Miller-Wilkerson は

$$H_{sep}^* \cong H^*(\text{Map}(BV, X)_f; \mathbb{Z}/p)$$

となることを示した. すなわち H_{sep}^* が空間のコホモロジー環として得られる. そこでこの事実より $H_{sep}^* = H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$ となることを示した. (ここで p が奇素数であるという仮定が必要であり, $p = 2$ に対してはこれは事実ではない. その理由は Hopf 不変量 1 は $p = 2$ のときは p が奇素数のときより多いということからきている.) 以上より

$$H^* \cong H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)^W$$

を得る. またこの結果から $\text{Map}(BV, X)_f$ は $BT_p^{k\wedge}$ のホモトピー型を持ち, さらに評価写像 $e: \text{Map}(BV, X)_f \rightarrow X$ から誘導される準同型写像が包含写像 $H^* \subset H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbb{Z}/p)$ になることが分かる. よって特に次が分かる.

定理 7.2 写像 $g: BT_p^{k\wedge} \rightarrow X$ で, 単射準同型 $g^*: H^*(X; \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)$ を誘導するものが存在する. さらに §4(*) の部分群 $W \subset GL(k, \mathbf{Z}/p)$ に対して次の同型が成り立つ

$$g^*: H^* \cong H^*(BT_p^{k\wedge}; \mathbf{Z}/p)^W.$$

さて次に示さなくてはならないことは, 包含写像 $W \subset GL(k, \mathbf{Z}/p)$ の持ち上げ $W \rightarrow GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ が存在するということである.

$W(g)$ を自己ホモトピー同値写像 $f: BT_p^{k\wedge} \rightarrow BT_p^{k\wedge}$ で $g \circ f \simeq g$ をみたすもののホモトピー類からなる群とする. 明かに自然な写像 $W(g) \rightarrow W$ と $W(g) \rightarrow GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ で次の図式を可換にするものが存在する

$$\begin{array}{ccc} W(g) & \longrightarrow & GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & GL(k, \mathbf{Z}/p) \end{array}$$

ここで Dwyer-Miller-Wilkerson は準同型写像 $W(g) \rightarrow W$ が同型写像になることを示した. すなわち $W(g)$ を W と同一視することにより $W \subset GL(k, \mathbf{Z}/p)$ は持ち上げ $W \rightarrow GL(k, \mathbf{Z}_p^\wedge)$ を持つことが分かった.

上の議論より実現可能な modular 多項式環も Clark-Ewing の表から得られることが分かる. しかし逆に Clark-Ewing の表にあるすべての modular 多項式環が実現可能であるわけではない. (実際実現不可能なものも存在する.) 一方 Aguadé [Agu89] は図式のホモトピー順極限構成を用いてある種の modular 多項式環が実現されることを示した.

さて modular 不変式の中で特に最近話題になったものは $W = GL(k, \mathbf{Z}/p)$ のときである. このときの不変式を $\widetilde{BX}(k)$ とかくことにする. すなわち

$$\widetilde{BX}(k) = \mathbf{Z}/p[t_1, \dots, t_k]^W, \quad W = GL(k, \mathbf{Z}/p).$$

この不変式が多項式環になることは Dickson [Dic11] によって示されており, そのためこれは Dickson 不変量とよばれている. 次が成り立つ.

$$\widetilde{BX}(k) \cong \mathbf{Z}/p[x_1, \dots, x_k], \quad \deg x_i = 2(p^k - p^{k-i}).$$

この多項式環の実現可能性は Smith-Switzer によって完全に分かっている.

Theorem 7.3 ([SS83]) (1) $\widetilde{BX}(1)$ は任意の p に関して実現可能.

(2) $\widetilde{BX}(2)$ が実現可能である必要十分条件は $p = 2, 3$.

(3) $\widetilde{BX}(k)$ ($k \geq 3$) はすべての p に関して実現可能でない.

$\widetilde{BX}(k)$ は $k=1$ のときは BS^{2p-1}_p で, $k=2, p=2$ のときは $BSU(3)$ によって実現されている. また $k=2, p=3$ のときは Zabrodsky [Zab84] が実現する空間を構成している.

さて前にも述べてあるが $p=2$ のときは t_i の次数は 1 であってもかまわない. このとき多項式環 $\mathbb{Z}/2[t_1, \dots, t_k]$ は無限次元実射影空間 RP^∞ , (あるいは elementary abelian 2 群 $(\mathbb{Z}/2)^k$) のコホモロジーと考えられる. このときの Dickson 不変量を $BX(k)$ で表わすことにする. すなわち

$$BX(k) = \mathbb{Z}/2[t_1, \dots, t_k]^W \quad (W = GL(k, \mathbb{Z}/2)), \quad \deg x_i = 2^k - 2^{k-i}.$$

Smith-Switzer はこの場合に関しても実現可能性に関して部分的な結果を与えている.

定理 7.4 ([SS83]) $k=1, 2, 3$ ならば $BX(k)$ は実現可能である. (実際 $RP^\infty, BSO(3), BG_2$ によって実現される.) 一方 $k \geq 6$ ならば $BX(k)$ は実現不可能である.

上の定理で残っているのは $BX(4)$ と $BX(5)$ である. $BX(5)$ に関しては Jeanneret-Suter の結果がある.

定理 7.5 ([JS91]) $BX(5)$ は実現不可能である.

Jeanneret-Suter は実際には上の定理より強い結果を示している. すなわちもし $BX(5) \cong H^*(BD(5); \mathbb{Z}/2)$ とすると $H^*(\Omega BD(5); \mathbb{Z}/2) = X(5)$ は代数的な方法で計算ができる. そこで彼等は $X(5)$ を実現する空間 (ループ空間ではない) が存在しないことを示したのである.

さて Lin-Williams は $BX(4)$ が実現不可能であるという論文を発表した ([LW89]). 一方 Dwyer-Wilkerson は最近 $BX(4)$ が実現可能であるという結果を発表している ([DW]). この二つの結果は明らかに矛盾しているが, 最近の一般的な考えでは Dwyer-Wilkerson の結果が正しいであろうということになっている. また Lin-Williams は自分たちの間違いを認めたという情報もある.

Dwyer-Wilkerson の方法もやはりホモトピー順極限構成を用いたものであり, Jackowski-McClure による Lie 群の分類空間のホモトピー順極限分解 ([JM]) をヒントにしている.

Clark-Ewing 表

No	Type	Primes
1	$[4, 6, \dots, 2(n+1)]$	all
2a	$[2m, 4m, \dots, 2(n-1)m, 2qn]$ ($m \equiv 0 \pmod q, m > 1$)	$p \equiv 1 \pmod m$
2b	$[4, 2m]$	$p \equiv \pm 1 \pmod m$ ($m > 3$) $p = 2$ ($m = 4, 6$) $p = 3$ ($m = 3, 6$)
3	$[2m]$	$p \equiv 1 \pmod m$
4	$[8, 12]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
5	$[12, 24]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
6	$[8, 24]$	$p \equiv 1 \pmod{12}$
7	$[24, 24]$	$p \equiv 1 \pmod{12}$
8	$[16, 24]$	$p \equiv 1 \pmod 4$
9	$[16, 48]$	$p \equiv 1 \pmod 8$
10	$[24, 48]$	$p \equiv 1 \pmod{12}$
11	$[48, 48]$	$p \equiv 1 \pmod{24}$
12	$[12, 16]$	$p \equiv 1, 3 \pmod 8$
13	$[16, 24]$	$p \equiv 1 \pmod 8$
14	$[12, 48]$	$p \equiv 1, 19 \pmod{24}$
15	$[24, 48]$	$p \equiv 1 \pmod{24}$
16	$[40, 60]$	$p \equiv 1 \pmod 5$
17	$[40, 120]$	$p \equiv 1 \pmod{20}$
18	$[60, 120]$	$p \equiv 1 \pmod{15}$
19	$[120, 120]$	$p \equiv 1 \pmod{60}$
20	$[24, 60]$	$p \equiv 1, 4 \pmod{15}$
21	$[24, 120]$	$p \equiv 1, 49 \pmod{60}$
22	$[24, 40]$	$p \equiv 1, 9 \pmod{20}$
23	$[4, 12, 20]$	$p \equiv 1, 4 \pmod 5$
24	$[8, 12, 28]$	$p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$
25	$[12, 18, 24]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
26	$[12, 24, 36]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
27	$[12, 24, 60]$	$p \equiv 1, 4 \pmod{15}$
28	$[4, 12, 16, 24]$	all
29	$[8, 16, 24, 40]$	$p \equiv 1 \pmod 4$
30	$[4, 24, 40, 60]$	$p \equiv 1, 4 \pmod 5$
31	$[16, 24, 40, 48]$	$p \equiv 1 \pmod 4$
32	$[24, 36, 48, 60]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
33	$[8, 12, 20, 24, 36]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
34	$[12, 24, 36, 48, 60, 84]$	$p \equiv 1 \pmod 3$
35	$[4, 10, 12, 16, 18, 24]$	all
36	$[4, 12, 16, 20, 24, 28, 36]$	all
37	$[4, 16, 24, 28, 36, 40, 48, 60]$	all

Reference

- [Ada60] J. F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. of Math.* **72** (1960), 20–104.
- [AW80] J. F. Adams and C. Wilkerson, Finite H -spaces and algebras over the Steenrod algebra, *Ann. of Math.* **111** (1980), 95–143.
- [Agu89] J. Aguadé, Constructing modular classifying spaces, *Israel J. Math.* **66** (1989), 23–40.
- [Bor57] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann. of Math.* **57** (1953), 115–207.
- [CE74] A. Clark and J. Ewing, The realization of polynomial algebra as cohomology rings, *Pacific J. Math.* **50** (1974), 425–434.
- [Dic11] L. E. Dickson, A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **12** (1911), 75–98.
- [DMW] W. G. Dwyer, H. Miller, and C. Wilkerson, Homotopy uniqueness of classifying spaces, *pre-print*.
- [DW] W. G. Dwyer and C. Wilkerson, A new finite loop space at the prime two, *pre-print*.
- [Gon78] D. L. Gonçalves, Mod 2 homotopy-associative h -spaces, *Geometric Application of Homotopy Theory I*, Springer Lecture Notes in Math. **657** (1978), 198–216.
- [JM] S. Jackowski and J. E. McClure, Homotopy decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups, *to appear in Topology*.
- [JS91] A. Jeanneret and U. Suter, Réalisation topologique de certaines algèbres associées aux algèbres de Dickson, *pre-print*.
- [Lan87] J. Lannes, Sur la cohomologie modulo p des p -groupes Abéliens élémentaires, *Proceedings of the Durham Symposium 1985*. London Math. Soc. Lecture Notes Series **117** (1987), 97–116.
- [LW89] J. P. Lin and F. Williams, On 6-connected finite H -spaces with 2-torsion, *Topology* **28** (1989), 7–34.

- [ST54] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.* **62** (1954), 274–304.
- [SS83] L. Smith and R. M. Switzer, Realizability and nonrealizability of Dickson algebras as cohomology rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983), 303–313.
- [Ste61] N. E. Steenrod, The cohomology algebra of a space, *Enseign. Math.* **7** (1961), 153–178.
- [Sul71] D. Sullivan, Geometric topology. I. Localization, periodicity and Galois symmetry, (1971).
- [Zab84] A. Zabrodsky, On the realization of invariant subgroups of $\pi_*(X)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **285** (1984), 467–496.