数理解析研究所講究録
第 781 巻 1992 年 129-131

入射的加群のアナロジーとしての h_*-入射的スペクトラムについて

広島大理 大川哲介 (Tetsusuke Ohkawa)

環上の加群について"入射的"なる概念がある. これの CW 複体, スペクトラムについてのアナロジーは, [1]に於いて若干調べたが, ここではその後の結果も含めて述べる.

環 R 上の加群 M が R 上入射的であるとは, 任意の R-加群 N, N' の間の任意の単射 $f: N \to N'$ に対して, $f^*: \mathrm{Hom}_R(N', M) \to \mathrm{Hom}_R(N, M)$ が全射となることをいう. 又 R-加群 M, N の間の射 $f: M \to N$ が (R-) injective enveloping map であるとは, ① 単射である, ② N は入射的, ③ $f(M) \subset N' \subset N$ なる任意の入射的 R-加群 N' について, $N' = N$ が成立することをいう. これについて次が成立する

定理. 任意の R-加群 M に対し, ある R-加群 N と射 $f: M \to N$ で, f が R-injective enveloping map となるものが存在する.

この事実の位相的アナロジーを考える. 以下 $\mathcal{S}$ を CW-スペクトラムの圏, $\mathcal{T}$ をそのホモトピー圏, h_* を一つの一般

ホモロジーとする．$X \in Ob\,\mathcal{S}$ が h_*－入射的であるとは，スペクトラム間の任意の map $f: Y \to Z$ に対し，もし $h_*(f)$ が単射ならば $h^*: [Z, X] \longrightarrow [Y, X]$ が全射となることをいう．

又スペクトラム間の map $f: X \to Y$ が h_*-injective enveloping map であるとは，① $h_*(f)$ は単射，② Y は h_*－入射的，③ 任意のスペクトラム Z 及び任意の map $g: Y \to Z$ に対し，もし $h_*(g \circ f)$ が単射なら $h_*(g)$ も単射になることをいう．これについて次が成立する（[1]）．

定理．任意のスペクトラム X に対し，適当なるスペクトラム Y と，適当なる map $f: X \to Y$ で f が h_*-injective enveloping map となるものが存在する

さて，代数の方では次が成立する

定理　R－加群 M が入射的で直既約ならば $A = End_R(M)$ に於いて非可逆元全体 I はイデアルをなし，A/I は斜体となる．

この定理は前頁の定理から容易に得られる．これについて次の位相的アナロジーを得た．

定理　スペクトラム X が h_*－入射的で，$\hat{\mathcal{S}}$ で直既約ならば $A = [X, X]_*$ に於いて，非可逆元全体 I は次数イデアルをなし，A/I は次数斜体となる．

証明は代数の場合と平行にはいかず若干複雑になるので略する　次に $B = A/I$ として如何なる次数斜体が生じるかという問題を生ずるが、これについて次が成立する

定理. ① $ch(B) = 0$ なら $B \cong \mathbb{Q}$

② 任意の有限体は（適当に h_*, X を取って）B として実現することが出来る

③ n：自然数, p：素数とするとき $\mathbb{Z}_p[v, v^{-1}]$（但し $\deg v = 2(p^n - 1)$）も実現出来る

文献

[1] The injective hull of homotopy types with respect to generalized homology functors, Hiroshima M. J. 19 (1989) 631 - 639