数理解析研究所講究録
第784巻 1992年 46-64

Sierpinski gasket 上の漸近的に1次元的な連続マルコフ過程の構成

宇都宮大学工学部　服部哲弥　(Tetsuya Hattori)

本講演は東京大学教養学部服部久美子および日本医科大学渡辺浩との共同研究に基づく.

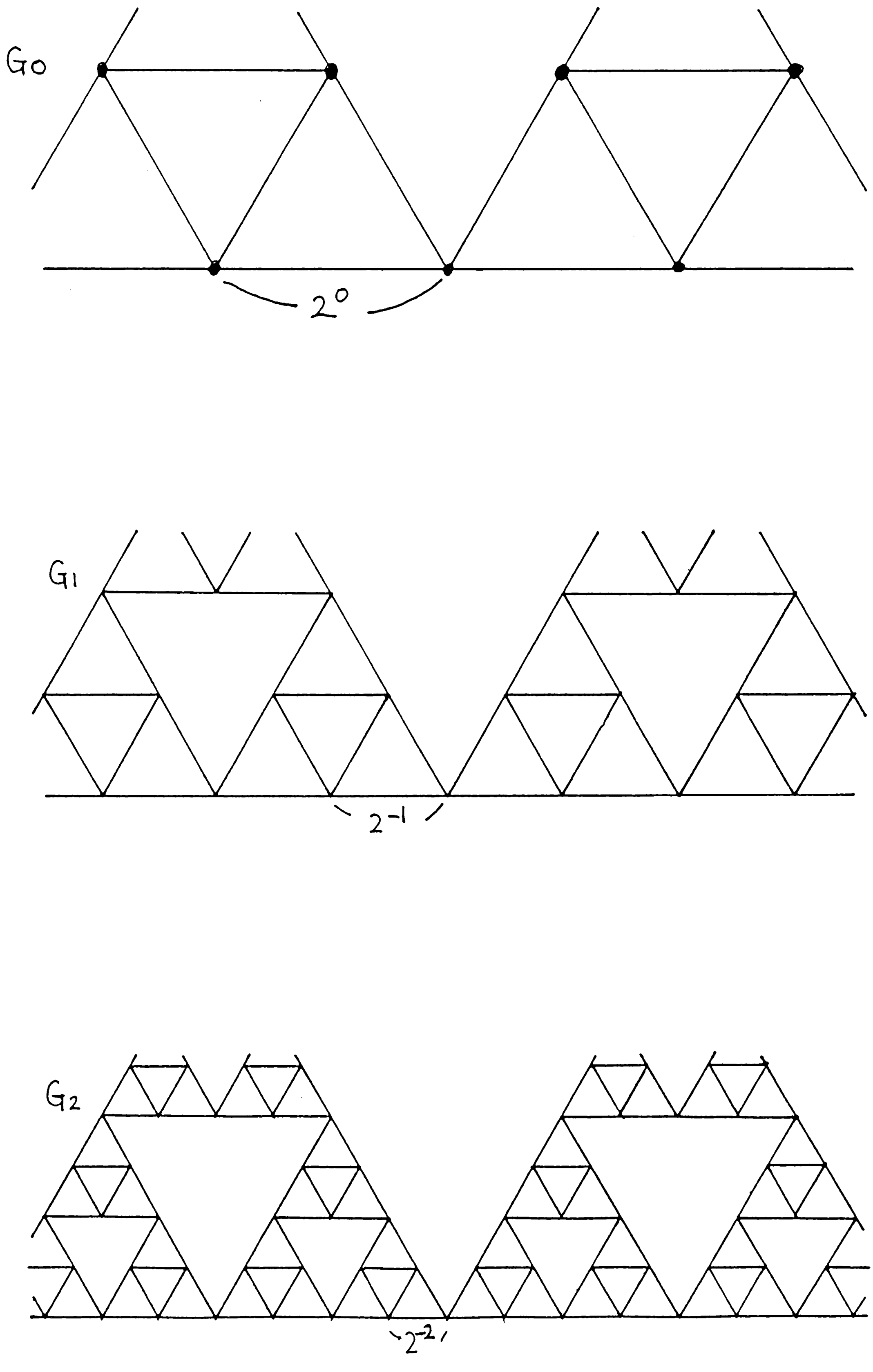
0. 目標.

Sierpinski gasket(以下 SG と略記)およびその類似図形の上の拡散過程の構成には，くりこみ群と呼ばれる力学系の軌跡(trajectory)が対応する.

SG 上の拡散過程の構成に関する既存の結果は，全てくりこみ群の非退化固定点に対応する過程を構成している. ここでの目標は退化・不安定固定点に漸近する軌跡に対応する過程の構成である.

既存の研究においては固定点直上に留まるというただ一つの軌跡だけを考察すれば十分であるのに対し，ここでの構成では不安定固定点の近傍から始まる無限個の軌跡についての

pre - SG



評価を行う必要がある．従ってくりこみ群の軌跡という概念が陽に登場する．また，過程が図形全体に拡散することを言うためには，軌跡が退化固定点に近付く速さと対応する平均歩数の増大の速さを比較する必要が新たに生じ，基本的な評価を注意深く行う必要がある．なお，この構成によって得られる過程はその構成の仕方から直ちに既存の拡散過程と異なることが分かる．

1. Notation.

最小単位が一辺 2^{-N} の pre-Sierpinski gasket の頂点の集合を G_N と書く．SG 上の拡散過程の構成は通常 G_N 上の simple random walk Y_N の連続極限として構成される．
即ち，Y_N は G_N 上に値をとる Markov chain であって，時刻 i において $Y_N(i)=P$ 即ち P にいるとき，時刻 $i+1$ においては P の4つのとなりの点（pre-SG 上の線分で P と結ばれた G_N の点）にいる確率がそれぞれ $1/4$ として遷移確率が定義されたものである．即ち，ある頂点にいるとき次の時刻には隣の頂点に等確率で移る Markov chain である．連続極限とは $N\to\infty$ を以下に述べるように上手にとることである．

Coarse-graining (decimation) を説明する.

SG に値を取る過程 X に対して stopping time $T^n_i(X)$ を次で定義する $(n=0,1,2,...)$:

$$T^n_0(X) = \inf \{t \geqq 0 \mid X(t) \in G_n\},$$

$i=0,1,2,...$ に対して,

$$T^n_{i+1}(X) = \inf \{t > T^n_i(X) \mid X(t) \in G_n \setminus \{X(T^n_i(X))\}\}.$$

即ち, T^n_i は G_n の点を i 回目にhitする時刻を表す.

(続けて同一点をhitしたときは数えない.)

G_n の点を通る時間間隔を $W^n(X)=T^n_1(X)-T^n_0(X)$ とおく.

(Random walk の場合は時間は歩数のことである.)

Coarse-graining (decimation) とは, 整数 n を取るとき G_N $(N>n)$ または SG の上の過程 $X(t)$ に対して

G_n 上に値をとる walk (離散時間過程) $X'_i = X(T^n_i(X))$

を対応させることである.

Simple random walk の列 $\{Y_N\}$, $N=1,2,3,...$ はこの

decimation操作に対する不変性 "decimation invariance" を

持つ（これが実はくりこみ群の固定点に対応するということである）．即ち，G_N 上の simple random walk Y_N を coarse-grain して得られる G_n 上の walk

$$Y'(i) = Y_N(T_i^n(Y_N))$$

は G_n 上の simple random walk Y_n と同じ法則を持つ．
この事実は図形的対称性から Y' の遷移確率も等方的になることと図形の形（finietely ramified）から 1 step毎の Y' の遷移は G_n の隣の点に限られることに基づく．

連続極限を取るのに必要なもう一つの概念は decimation に対する平均歩数の増大度（time scaling）である．即ち次が成り立つことが知られている：

$$N > n \text{ のとき } E[W^n(Y_N)] = 5^{N-n}.$$

ここで $E[\cdot]$ は期待値を表す．
この結果は $n=N-1$ に対して具体的な計算で示した後，decimation invariance で inductiveに全ての $N>n$ で証明される．このこと（$+\alpha$）から，スケールされた歩数分布

$5^{-N} W^n(Y_N)$ の収束を得る.

この結果は N を1つ増やすと時間間隔(歩数)が 5 倍になることを言っていて, そのことから時間を 5 でスケール変換することで連続極限を得ることが期待される. 実際, 次の結果が得られている.

定理([Kus][G][BP]):

$$X_N(t) = Y_N([5^N t]), \quad t \geqq 0,$$

とおく. このとき SG に値を取る連続かつ非自明な(non-constant)Markov過程 X が存在して X_N は $N\to\infty$ で X に弱収束する. (位相は, SG をユークリッド平面に埋め込んで SG 上のpathを実数(時刻)から平面への関数とみたときの一様収束位相.)

遷移確率密度などに関する多くの精密な結果([BP]), 及び SG 以外の類似図形(finitely ramified fractal)への拡張([Kum1][Kum2][L])がなされているが詳しくは本講究録の該当する記事にゆずる.

以上の(既存の)結果においてはdecimationに対応するく

りこみ群は陽に出てこない. Finitely ramified pre-fractal におけるdecimationとくりこみ群の対応の定式化は[HHW]において行った. そこでは regularly ramified fractal という枠組みで定式化を行ったが, SG の場合について次に説明する.

2. くりこみ群.

Simple random walk Y_N の一般化として次のような G_N 上の random walk $Z=Z_{N,(x,y,z)}$ を考える.

Z は G_N 上に値をとる Markov chain で, $Z(i)=P$ のとき時刻 $i+1$ においては P の4つのとなりの点のどれかに遷移するが等確率ではなく, P から見て正三角形の3つの辺の傾きの方向即ち傾き60°方向, 傾き120°方向, 水平方向への遷移が $x:y:z$ の比率であるとする. 例えば水平方向に2本, 右斜め上と左斜め上方向に各1本ずつ線分が延びている点からの遷移確率は, $M^{-1}=x+y+2z$ とおくとき, 右斜め上方向の点に Mx, 左斜め上方向の点に My, 左右に Mz である. Simple random walk の場合は $x=y=z$ である.

そうすると, 遷移確率空間(parameter space)は例えば

$$\{(x,y,z) \mid x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$$

と表すことができる．但し x,y,z のうち２つが 0 になると１次元的遷移しか許されず，SG 全体への遷移はできない．また，parameter space 上の１点に１つ（processの法則の意味で）の random walk が対応している．

なお，ここでは pre-SG を構成する各三角形毎に遷移確率が等しいという一様性があり，かつ，左右或は上下方向に対称な遷移である場合について議論している．[Kum1]は対称性の条件を落とした場合についてprocessの構成を行っている．また，[Ki1][Ki2]は Dirichlet form を用いる議論でここでの話と方法論は異なるが，対応づけると一様性をある仕方で落とした場合を含めて調べていることになる．いずれも（以下で述べる定義を拡張した意味で）固定点に対応する random walk による構成であり，本研究の目標とは異なるprocessである．

$n=N-1$ として decimation を行う：

$$Z'_i = Z(T_i^{N-1}(Z)) .$$

Gasket図形の構造から１step毎の Z' の遷移は G_{N-1} の隣の点に限られるが，遷移確率は一般に (x,y,z) ではなくなる．Z' の遷移確率 (x',y',z') は SG では

$$x' = C\,(x + yz/3)\,,$$
$$y' = C\,(y + zx/3)\,,$$
$$z' = C\,(z + xy/3)\,,\quad 1/C = 1 + (xy+yz+zx)/3\,,$$

となることが計算で分かる．この関係式は N によらない．Z' は $Z_{N-1,(x',y',z')}$ と同じ法則を持つということである．

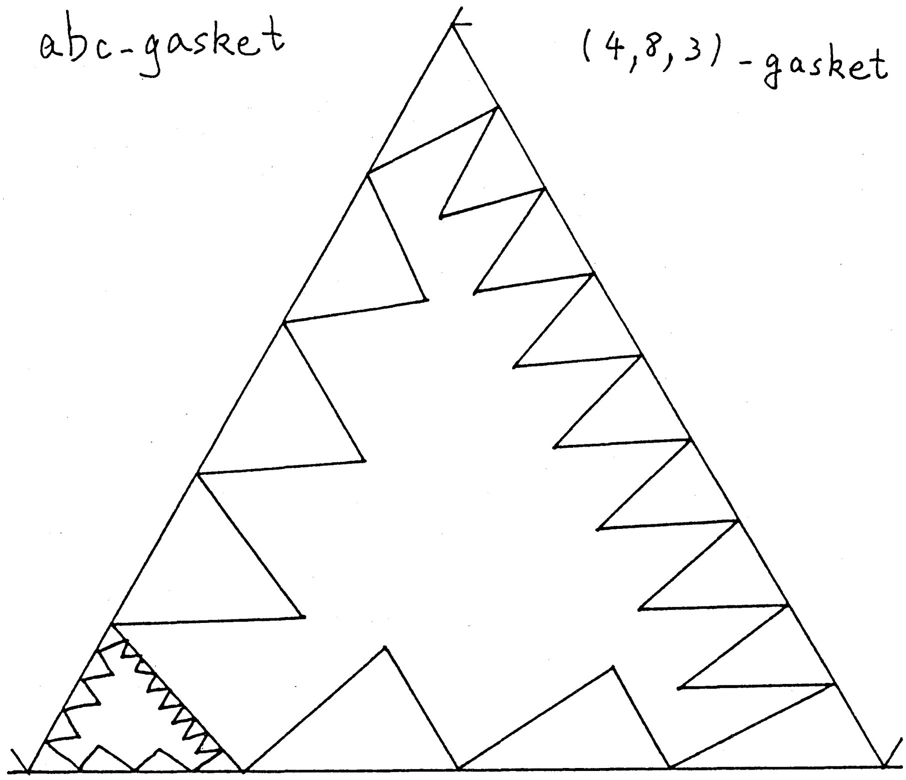
上記の関係式は parameter space 上の写像Tを定義している．Tが定める parameter space 上の力学系をくりこみ群と呼ぶ．くりこみ群は decimation に対する Z と Z' の関係を完全に決定する．即ち，parameter space 上の力学系Tを与えれば Z から始めて decimation を繰り返して得られる Z' の法則は全て分かることになる．

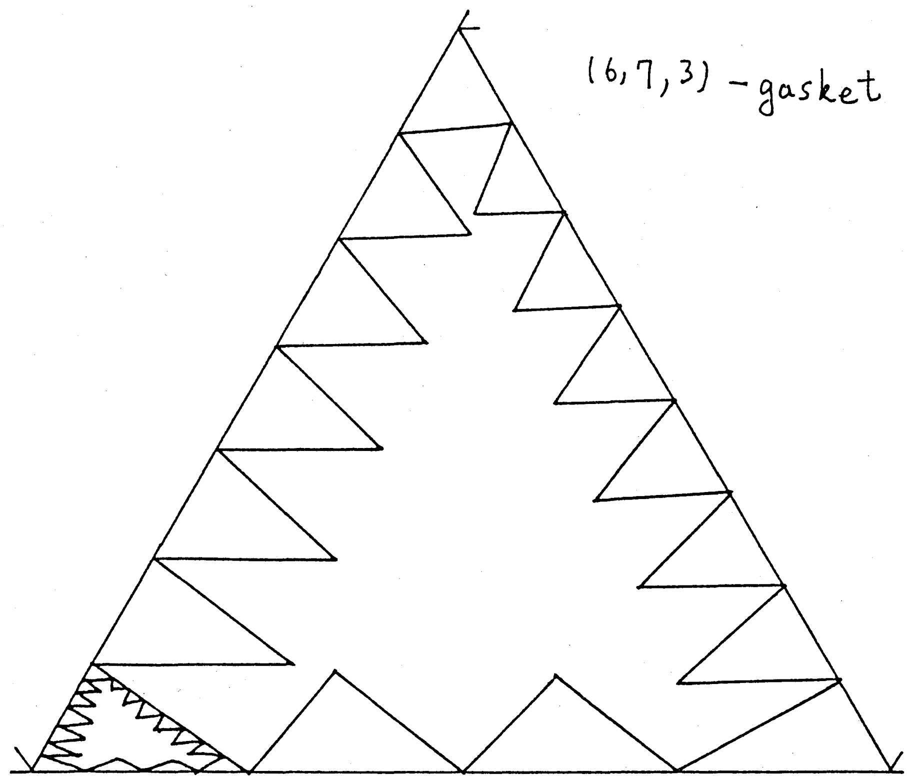
くりこみ群は SG 以外の finitely ramified fractal と呼ばれる適切なフラクタルの上の random walk でも同様に作ることができる．現在そのような fractal上の拡散の構成は全てくりこみ群の固定点に対応する random walk を用いている．

過程が図形全体に拡散するためには，全ての辺を通る random walk を用いる必要がある：$xyz \neq 0$．くりこみ群の固定点

に対応する(decimation invariant) random walk を用いた場合, $xyz \neq 0$ を満たす固定点(non-degenerate fixed point)を選ばなければならない. Fixed point の存在そのものは不動点定理により保証されるが non-degenerate fixed point の存在は自明ではない. [L]は non-degenerate fixed point が存在するようにフラクタルのクラスを巧妙に限ることによって確率過程を構成した. しかし, 一般には一見類似したフラクタルでありながら一方は non-degenerate fixed point を持ち, 他方は持たないような例を作ることができる. この点に関して[HHW]で導入した abc-gasket は次のようなものである.

SG では三角形の各辺を2等分して小三角形を構成したが, abc-gasket では3辺をそれぞれ $a+1$, $b+1$, $c+1$ 等分 (a, b, c は自然数) する. 元の三角形の頂点をはさむ2線分については SG のときと同様3つめの線分を引いて小三角形とする. 各辺の残りの線分はそれぞれ独立に2辺を加えて小三角形とする. 即ち1つの三角形の中に $a+b+c$ 個の小三角形を書き込む. この操作をrecursiveに繰り返して得られる図形をabc-gasketと呼ぶ ([HHW]では図形を大きくする方向に構成したが, 構成方法の本質はもちろん変わらない). なお abc-gasket は各三角形を正三角形にしようとすると一般には平面には埋


abc-gasket
(4,8,3)-gasket


(6,7,3)-gasket

め込めないが3次元空間には埋め込める. また, SG は $a=b=c=1$ の場合である.

abc-gasket では (a,b,c) の値によって non-degenerate fixed point の有無が変わることが具体的な計算によって示される.

定理([HHW]):

Pre-abc-gasket 上の random walk $Z_{N,(x,y,z)}$ の decimation に対応するくりこみ群に non-degenerate fixed point が存在するための必要十分条件は

$$b^{-1}+c^{-1}>a^{-1}>|b^{-1}-c^{-1}|$$

である.

従って, 例えば, $(4,8,3)$-gasket は non-degenerate fixed point を持つが $(6,7,3)$-gasket は持たない. 前述のように既存の方法で全gasketに拡散する拡散を構成できる可能性があるのはくりこみ群が non-degenerate fixed point を持つ場合だけである. では $(6,7,3)$-gasket 上の拡散過程は構成できないのであろうか? これが今回の研究の動機である.

3. 結果.

以下の結果は原理的には SG に限らず一般のくりこみ群の不安定（退化）固定点の近傍で成立するが，ここでは SG に即して説明する.

命題：

$0 < w_0 < 1$ とし，w_N, $N=1,2,3,...,$ を

$$w_{N+1} = (6 - w_N)^{-1} \{ -2 + 3w_N + (4 + 6w_N + 6w_N^2)^{1/2} \}$$

で定義する. このとき

$w_0 > w_1 > w_2 > \cdots \to 0$ であって，各 N に対して

$$(x_N, y_N, z_N) = (1+2w_N)^{-1} (w_N, w_N, 1)$$

とおいて G_N 上の random walk $Z_N = Z_{N,(x_N, y_N, z_N)}$ を定義すると，各 $n < N$ に対して Z_n は Z_N の decimationになっている.

この命題は上記のようにparameterを選ぶと，くりこみ写像Tにより

$$(x_{N-1}, y_{N-1}, z_{N-1}) = T(x_N, y_N, z_N)$$

となっているということに他ならない. この random walk の列 $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$, を用いて連続極限を取ることを考える.

定理：

各 n に対して scale した歩数分布

$6^{-N} W^n(Z_N)$ は $N \to \infty$ で収束する.

既に述べたように, この歩数分布の収束は連続極限による確率過程の構成の重要な一段階である. Fixed point theory の場合スケール因子は 5 であったが, ここでは 6 になる. これは本質的に異なる確率過程であることを暗示している. この講究録を書いている時点で証明は完了していないが, 目標は次の定理である.

期待する定理：

$$X_N(t) = Z_N([6^N t]), \quad t \geqq 0,$$

とおく. このとき SG に値を取る連続かつ非自明な(non-constant)Markov過程 X が存在して X_N は $N\to\infty$ で X に弱収束する.

(なお,講演では歩数分布についてもtightnessしか発表しなかったが,その後収束することが分かった.)

上記歩数分布収束定理の証明には Z_N の歩数分布の特性関数の N についてのrecursion関係式を調べる必要があるが,この関係式は複雑で収束に細かい判定を必要とするので,計算機上の数式処理ソフトを利用する.

上記歩数分布収束定理は abc-gasket においても成立する.但しscale因子 6 は(a,b,c)に依存して変わる.一般の abc-gasket では SG (a=b=c=1) に比べて処理すべき数式は更に複雑になり,渡辺浩氏が Reduce on 386 を 32bit PC で用いて50時間程度をかけて証明を完了した.

このようにして構成されるであろう確率過程に期待される主要な性質と,今後の研究が待たれる点について若干触れておく.

できあがったprocess X を scale n でdecimationすると再

び Z_n を得るであろうと期待する：$X_n(i)=X(T_i^n(X))$ とおくと

$X_n = Z_n$ （法則の意味で）．

従って，scale n を細かく（$n\to\infty$）して考察することにより，X は連続でマルコフ性を持つと（naiveには）予想される．

また $n\to\infty$ のとき $w_n\to 0$ なので，Z_n は斜め方向への遷移確率が $n\to\infty$ でゼロに近付くような random walk の列である．即ちprocess X の細かい挙動を顕微鏡で観察すると倍率を上げるほど水平方向の遷移が多くなる．この意味で漸近的に1次元的な確率過程が構成される．従って特に既存の SG 上の拡散過程とは異なる．もちろん，有限の scale n でみると斜め方向の遷移もゼロでないから，水平方向だけの1次元拡散でもない．少なくとも全ての有理点に「拡散」する．

既に述べたように abc-gasket のくりこみ群には非退化固定点がないものがあるが，退化不安定固定点は必ずある．従って，既存の拡散が構成できない場合でも原理的に今回の方法で拡散を構成できる．

この拡散の性質について問題点の一つは scaling limit である．即ち時計の進みを遅くしながら顕微鏡で拡大して眺めるとどうなるか，式で書くと

$$2^{n} X(6^{-n}t) \rightarrow C(t), \quad n \rightarrow \infty$$

で定義される C は（もし存在するなら）どうなるかである（時間を 6 以外でスケールすると連続非自明な過程は得られない）．先ほど述べたように n を大きくするほど斜め方向の遷移は減るので極限では 1 次元拡散になりそうであるが，定義からもし C が存在するならば $C(6t)=2C(t)$ となるので 1 次元 Brownian motion （$B(4t)=2B(t)$を満たす）ではありえない．C が存在しない（弱収束しない）可能性もあるが，興味ある問題である．

最後に余談だが今回の構成法の特徴，即ち SG が持っているself-similarityを random walk の段階でわざわざ壊してしかも漸近的に 1 次元的な拡散（退化固定点）から出発してもうまくいくと思う着想の由来（なぜそれを自然な対象と思うか），に触れておく．3＋1 次現場の量子論で現実の世界で実現していて，かつ数学的に場の量子論の枠内で構成可能だと信じられている唯一の理論として漸近自由な場の理論がある．これは実際の世界では物質同士の相互作用があるのに，顕微鏡で拡大した極限(scaling limit)では相互作用のない自由場の理論になっているような理論構造を特徴とする．数学

的にも物理的にも内容は異なるが，この漸近的自由な場の理論の類推で今回の確率過程を着想したのである．

引用文献．

[BP] M.T.Barlow, E.A.Perkins, Brownian motion on the sierpinski gasket. Prob. Theor. Rel. Fields 79 (1988) 542-624.

[G] S.Goldstein, Random walks and diffusion on fractals. In H.Kesten(ed.) Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems. IMA Math. Appl. 8. Springer (1987) 121-129.

[HHW] K.Hattori, T.Hattori, H.Watanabe, Gaussian field theories and the spectral dimensions. Prog. Theor. Phys. Suppl. 92 (1987) 108-143.

[Ki1] J.Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[Ki2] J.Kigami, Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpinski gasket. To appear in K.D.Elworthy, N.Ikeda(eds.) Asymptotic problems in probability theory. Pitman.

[Kum1] T.Kumagai, Construction and some properties of a class of non-symmetric diffusion process on the Sierpinski gasket. To appear in K.D.Elworthy, N.Ikeda(eds.) Asymptotic problems in probability theory. Pitman.

[Kum2] T.Kumagai, Estimates of the transition densities for Browninan motion on nested fractals. Preprint.

[Kus] S.Kusuoka, A diffusion process on a fractal. In K.Ito, N.Ikeda(eds.) Probabilistic methods on mathematical physics. Proc. Taniguchi Symp. Kinokuniya (1987) 251-274.

[L] T.Lindstrom, Brownian motion on nested fractals. Mem. Amer. Math. Soc. 420 (1990)