数理解析研究所講究録
第786巻 1992年 86-97

Average distance on Snow frame fractal

阪大理学部 村井 浄信 (Joushin Murai)

§1 Introduction.

[H-S]において、A.M.Hinz と A.Schief は R^D 内の compact set 上に "average distance" という量を導入し、Sierpinski gasket 上でその値を求めることに成功した。Sierpinski gasket とは、各辺の長さ1の三角形から、各辺の中点を頂点とする三角形を取り除く、この操作を残りの小三角形に対しても順次施していくことによって得られる図形である。この図形は 1915年に Waclaw Sierpinski によって、各点が分岐している初めての例として発見され、Mandelbrot により fractal の1つとして Sierpinski gasket と名付けられた。

Average distance を求める Hinz と Schief の議論で Key となるのは Sierpinski gasket の持つ図形的な特徴、self-similarity と finitely ramification である。

Lindstrøm [L] の提唱した "nested fractals" はこの2つの特徴を備えた $\mathbb{R}^D$ 内の fractal の class の1つである。

このpaperでは、snowflake fractal と呼ばれる nested fractals の1つについて、Hinz と Schief の手法を一般化することによって、average distance を求めるが、多くの nested fractals に対して、この一般化された方法が有効であることを注意しておく。

<u>Def 1.1</u> E : c.p.t. $\subset \mathbb{R}^D$ $x, y \in E$

$$d(x, y) \equiv \inf \{ |\varphi| \,;\, \varphi \text{ is rectifiable curve in } E \text{ joining } x \text{ and } y \}$$

但し、$|\varphi|$ は curve φ の長さ

更に、

μ : E 上の finite measure

d : continuous と仮定。

$\hat{d}$: average distance とは

$$\hat{d} \equiv \int_{E \times E} d(x, y)\, \mu(dx)\, \mu(dy)$$

<u>Theorem 1.2</u> (A.M. Hinz − A. Schief)

Sierpinski gasket の average distance は $\frac{466}{885}$

∥

$\mathbb{R}^3$内の正四面体から始めることにより．Sierpinski gas-ket の 3 次元版を考えることができる．3-dim Sierpinski gasket 上では．Hinz と Schief の手法で average distance をもとめることができる．

Cor 1.3

3-dim Sierpinski gasket の average distance は $\frac{667}{1050}$

$\square$

§2 snow-frame fractal.

Def 2.1 $I = \{0, 1, \cdots, 5\} \simeq \mathbb{Z}_6$

(1) $\{p_i\}_{i \in I}$: 各辺の長さ 1 の正六角形の頂点，

特に $p_0 = 0$.

$\psi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$: p_i を fixed point とする縮小率 $1/3$ の縮小写像 $i \in I$.

$^{\exists 1} E$: c.p.t. $\subset \mathbb{R}^2$ with $E = \bigcup_{i \in I} \psi_i(E)$

E : snow frame fractal と呼ぶ．

(2) $E^- \equiv \{x \in E \,;\, d(p_0, x) \leq d(p_2, x)\}$. $E^+ = E - E^-$

但し d の定義は §1 に同じ．

$E_i \equiv \psi_i(E)$ $i \in I$. 特に $\widetilde{E} = E_0$

(3) μ : E 上の d_f - Hausdorff measure , $\mu(E) = 1$

但し $d_f = \log 6 / \log 3$

(4) $\pi : I^{\mathbb{N}} \longrightarrow E$. $\quad I^{\mathbb{N}} \ni w = w_1 w_2 \cdots$

$$\pi(w) \equiv \lim_{n\to\infty} \psi_{w_1} \circ \psi_{w_2} \circ \cdots \circ \psi_{w_n}(0)$$

によって、E と $I^{\mathbb{N}}$ に対応がつき、更に E の可算個の点を除いてこの対応は1対1、よって μ の下で、E と $I^{\mathbb{N}}$ は同一視できる。以後、$x \in E$ を $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in I$ と書く。

<u>Remark 2.2.</u>

(1) $p : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$p(\lambda) = (1-\lambda) p_0 + \lambda p_1 \quad \lambda \in [0, 1]$. とすると、

$p([0, 1]) \subset E$ 　更に、$|p| = \sqrt{3}$.

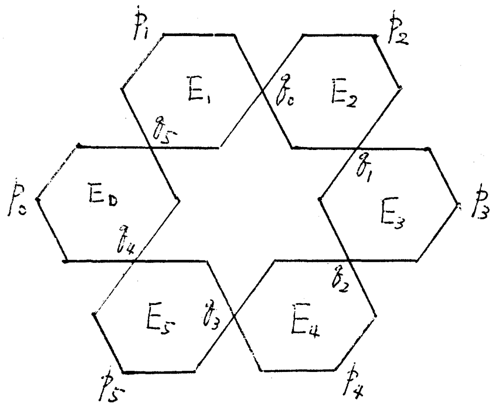
(2) $\{q_i\}_{i\in I} \subset E$ は次で与える

$$q_i \equiv F_{i+2}(p_i)$$

各 q_i に対応する $I^{\mathbb{N}}$ の元は2つずつあって、$i \cdot (\dot{i+2})$ と $(i+1) \cdot (\dot{i-1})$ である。但し $\dot{i} = i i \cdots\cdots$

<u>Prop. 2.3</u>

$$\lambda \equiv \int_E d(0, x)\, \mu(dx) = \frac{149}{204}\sqrt{3}$$



<u>proof</u>

$$\gamma \equiv \int_{E^-} d(0,x)\,\mu(dx)$$

$$\lambda = \sum_{i\in I} \int_{E_i} d(0,x)\,\mu(dx)$$

(Case Ⅰ)　$i=0$ のとき

$$\int_{E_0} d(0,x)\mu(dx) = \frac{1}{6}\int_E d(0,x)\,\mu(dx \mid x\in E_0)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\int_E d(0,x)\mu(dx) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\lambda$$

(Case Ⅱ)　$i=1,5$ のとき

$$\int_{E_1} d(0,x)\mu(dx) = \int_{E_1}\{d(0,q_5)+d(q_5,x)\}\,\mu(dx)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mu(E_1) + \int_{E_1} d(q_5,x)\mu(dx)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} + \int_{E_0} d(0,x)\,\mu(dx) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\lambda$$

$i=5$ のときも同様.

(Case Ⅲ)　$i=2,4$ のとき

$$\int_{E_2} d(0,x)\mu(dx) = \int_{E_2}\{d(0,q_0)+d(q_0,x)\}\,\mu(dx)$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\lambda$$

$i=4$ のときも同様.

(Case Ⅳ)　$i=3$ のとき

$E_3^- \equiv \{x\in E_3 \;;\; d(q_2,x)\le d(q_1,x)\}$,　$E_3^+ \equiv E_3 - E_3^-$

E_3^+, E_3^- が E^- と相似であることに注意して.

$$\int_{E_3} d(0,x)\,\mu(dx) = \int_{E_3^+}\{d(0,q_1)+d(q_1,x)\}\,\mu(dx)$$
$$+ \int_{E_3^-}\{d(0,q_2)+d(q_2,x)\}\,\mu(dx)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + \int_{E_3^+} d(q_1, x)\mu(dx) + \int_{E_3^-} d(q_2, x)\mu(dx)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\gamma$$

以上により、次の関係式を得る.

$$13\lambda = 2\gamma + 9\sqrt{3}.$$

γに対しても、同様の考察を与えることにより

$$32\gamma = 4\lambda + 5\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{149}{204}\sqrt{3} \qquad \left(\gamma = \frac{101}{408}\sqrt{3}\right)$$

□

average distance

$$\delta \equiv \int_{E\times E} d(x,y)\,\mu(dx)\,\mu(dy)$$

$$= \sum_{i\in I} 6\int_{E_0\times E_i} d(x,y)\,\mu(dx)\,\mu(dy)$$

に対して、Prop. 2.3 と同様な議論により

$$17\delta = 10\lambda - P + 4\sqrt{3}.$$

但し、$P \equiv 3\int_{E\times E}(d_1(x,y) - d_2(x,y))^+\,\mu\otimes\mu(dx, dy \mid x\in E_0, y\in E_3)$

$$d_1(x,y) \equiv d(x, q_5) + d(q_5, q_1) + d(q_1, y)$$

$$d_2(x,y) \equiv d(x, q_4) + d(q_4, q_2) + d(q_2, y)$$

$$a^+ = a \vee 0$$

Remark 2.2 より

$$d_1(x,y) - d_2(x,y) = d(x, 0\dot{2}) - d(x, 0\dot{4}) + d(3\dot{1}, y) - d(3\dot{5}, y)$$

<u>Def 2.4</u> $\quad x \in E \qquad x = (x_k)_{k \geq 1}$.

(1) $D^{(i)}(x) \equiv d(\dot{i}, x) - d(\dot{(i+2)}, x)$

$\widetilde{D}^{(i)}(x) \equiv d(x_1 \dot{i}, x) - d(x_1 \dot{(i+2)}, x)$

特に $D = D^{(0)}$, $\widetilde{D} = \widetilde{D}^{(0)}$

(2) σ : shift : $\begin{array}{ccc} I^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & I^{\mathbb{N}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x_1 x_2 x_3 \cdots & \longmapsto & x_2 x_3 \cdots \end{array}$

Definition 2.1 (4) より, $\sigma : E \longrightarrow E$ と思って良い.

(3) $U : E \longrightarrow E$: linear かつ $U(p_1) = p_5$, $U(p_3) = p_4$

<u>Lemma 2.5</u>

(1) $\pm D^{(i)}(\cdot) \overset{\mu}{\simeq} D(\cdot)$

$\pm \widetilde{D}^{(i)}(\cdot) \overset{\mu}{\simeq} \widetilde{D}(\cdot)$

(2) $D(x) = -D \circ U(x)$

for $\forall x \in E$

(3) $\widetilde{D}(x) = \frac{1}{3} D(\sigma x)$

for $\forall x \in E$.

(4) $-\sqrt{3} \leq D(x) \leq \sqrt{3}$ $\qquad$ for $\forall x \in E$

$-\sqrt{3} \leq D(x) \leq 0$ $\qquad$ for $\forall x \in E^-$

<u>proof.</u>

(1) 〜 (3) clear.

(4) $C = \max_{x \in E} D(x)$

$x_0 \in E$: D の max を attain.

$x_0 \in E_2$ は簡単にわかる.

$$C = d(0, g_0) + d(g_0, x_0) - d(p_2, x_0)$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{3} + \widetilde{D}(x_0) = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3} D(\sigma x_0)$$
$$\leq \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3} C$$

$\square$

Lemma 2.5 を用いて. P を変形すると

$$P = \int_{E\times E} (D(x) + D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$

P の計算を行うために, 次の notation を導入する.

$$Q \equiv \int_{E^- \times E} (D(x) + D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$
$$R \equiv \int_{E^- \times E} (-D(x) + D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$
$$S \equiv \int_{E^- \times E^-} (D(x) - D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$
$$\alpha \equiv \int_{E^+} D(x)\, d\mu \qquad \beta \equiv \int_{E^-} D(x)\, d\mu .$$

<u>Remark 2.6</u> Lem. 2.5 より次を得る

(1) $\int_E D(x)\,\mu(dx) = 0.$

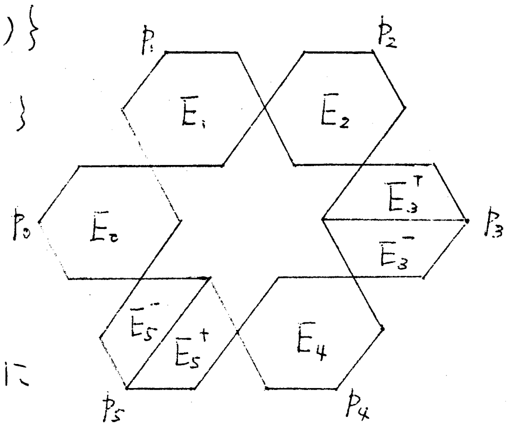
(2) $\int_{E^-} (D(x))^+ \mu(dx) = 0$

(3) $\alpha = \int_E (D(x))^+ d\mu = \int_{E^-} (-D(x))^+ d\mu = -\beta = \frac{4}{17}\sqrt{3}$

$E_3^- \equiv \{x \in E_3 \,;\, d(3\dot{5}, x) \le d(3\dot{1}, x)\}$

$E_5^- \equiv \{x \in E_5 \,;\, d(5\dot{1}, x) \le d(5\dot{3}, x)\}$

$E_3^+ \equiv E_3 - E_3^-\,, \quad E_5^+ = E_5 - E_5^-$



E を右図のように、8 parts に分割し、P の積分域を $8\times 8 = 64$ parts に分ける。

$$P = \int_{E_0\times E_0} + \int_{E_0\times E_1} + \cdots\cdots$$

<u>Lemma 2.7</u>

$$D(x) = \begin{cases} \widetilde{D}^{(0)}(x) - \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_0 \\ -\widetilde{D}^{(3)}(x) & \text{if } x \in E_1 \\ \widetilde{D}^{(0)}(x) + \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_3^+ \\ \widetilde{D}^{(5)}(x) + \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_3^- \\ \widetilde{D}^{(0)}(x) & \text{if } x \in E_4 \\ \widetilde{D}^{(1)}(x) - \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_5^+ \\ -\frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_5^- \end{cases}$$

$\square$

以上の準備の下で、64ケに分けられた P の各 part を変形していくが、ここではそのうちのいくつか、特徴的なものについて実際にそれを変形してみる。

$$\int_{E_0\times E_0} (D(x)+D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$
$$= \int_{E_0\times E_0} \left(\widetilde{D}^{(0)}(x) - \tfrac{2}{3}\sqrt{3} + \widetilde{D}^{(0)}(y) - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^+ d(\mu\otimes\mu)$$
$$= \frac{1}{36}\int_{E\times E} \left(\widetilde{D}^{(0)}(x) + \widetilde{D}^{(0)}(y) - \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^+ \mu\otimes\mu(dx,dy \mid x\in E_0,\ y\in E_0)$$
$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E} \left(D(\sigma x) + D(\sigma y) - 4\sqrt{3}\right)^+ \mu\otimes\mu(dx,dy \mid x\in\widetilde{E},\ y\in\widetilde{E})$$
$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E} \left(D(x) + D(y) - 4\sqrt{3}\right)^+ \mu\otimes\mu(dx,dy) = 0.$$

$$\int_{E_1\times E_4} (D(x)+D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$
$$= \int_{E_1\times E_4} \left(-D^{(3)}(x) + D^{(0)}(y)\right)^+ d(\mu\otimes\mu)$$
$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E} (D(x)+D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu) = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}P.$$

$$\int_{E_2\times E_5^+} (D(x)+D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu)$$
$$= \int_{E_2\times E_5^+} \left(\widetilde{D}^{(0)}(x) + \tfrac{2}{3}\sqrt{3} + \widetilde{D}^{(1)}(y) - \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^+ d(\mu\otimes\mu)$$
$$= \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E} \left(D(\sigma x) + D(\sigma y)\right)^+ \mu\otimes\mu(dx,dy \mid x\in E_2,\ y\in E_5^+)$$
$$= \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E} (D(x) + D(y))^+ \mu\otimes\mu(dx,dy \mid x\in E,\ y\in E^+)$$
$$= \frac{1}{72}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E} (D(x) - D(y))^+ \mu\otimes\mu(dx,dy \mid y\in E^-)$$
$$= \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\int_{E\times E^-} (D(x) - D(y))^+ \, d(\mu\otimes\mu) = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\cdot R$$

残りのpartに対しても、同様の変形を行うことにより、次の関係式を得る。

$$P = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\{6P + 2Q + 2R + 2S - 5X + 32\sqrt{3}\}$$

Q, R, S 各々について、P と同様な操作を施していくと以下の関係式を得る．

$$Q = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\left\{P + 3Q + 3R + S + \frac{1}{2}\alpha + 4\sqrt{3}\right\}$$

$$R = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\left\{P + 3Q + 3R + S - \frac{11}{2}\alpha + 28\sqrt{3}\right\}$$

$$S = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{3}\left\{P + Q + R + 3S + \frac{3}{2}\alpha + 4\sqrt{3}\right\}$$

これより、$P = \dfrac{431}{1394}\sqrt{3}$

<u>Theorem 2.8</u>

Snowframe fractal の average distance は $\dfrac{22990}{35547}\sqrt{3}$

□

<u>Remark 2.9</u>

(1) nested fractals は R^D 内の compact set であるが、average distance は必ずしも収束しない．Koch curve や Pentakun (see [Kum]) などが その例である．

x, y : ess. fixed points かつ互いに nearest neighbouring point (see [L]) のとき、$d(x, y)$ の収束と、average distance の収束は同値である．

(2) nested fractals の典型例の1つである Snowflake に対して、(1)より、その average distance は収束するが、その値を求めるにはさらにアイディアが必要である．

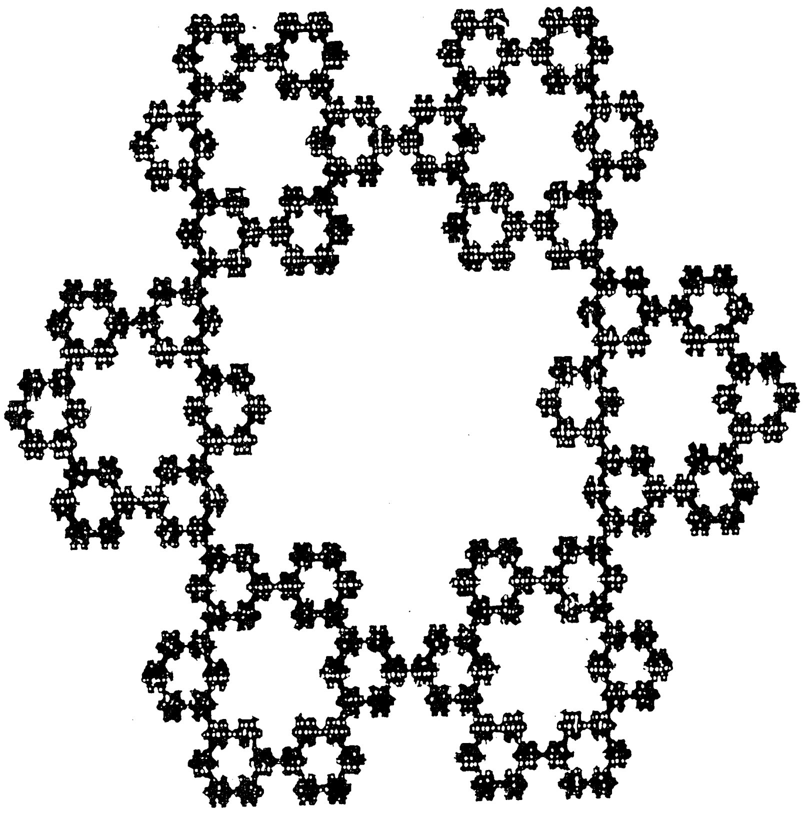
References

[H-S] Hinz, A.M., and Schief, A., The average distance on the Sierpinski gasket, Probab. Th. Rel. Fields 87 (1990), 129-138

[H] Hutchinson, J.E., Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713-747.

[Kum] Kumagai, T., Kyoto Univ. Master Theses (1991)

[L] Lindstrøm, T., Brownian motion on nested fractals, Mem. Amer. Math. Soc. 420 (1990)



Snowframe fractal