

Nonlinear viscoelastic equations について.

筑波大学数学系 柴田良弘 (YOSHIHIRO SHIBATA)

本講演会では, 九大工学部, 川島秀一氏との共同研究 [1] の内容を発表することを, 主な目的とします。

過去 10 年間以上の研究により, 非線形双曲型方程式の大域解を求める仕事は発展した。一つのプリンスィプルとして, 線形化した方程式の解の時間についての減衰度が速ければ, 少なくとも, 十分小さかつ滑らかな初期値に対しては, 時間的大域解が存在する。一方, 空間一次元で非線形波動方程式を考えると, じつ々に滑らかな小さい初期値から出発しても, C^2 solution は有限時間内に, その二次の導関数が爆発することが知られている (cf. [2])。このとき, 線形方程式として, $u_{tt} - c u_{xx} = 0$ ($c \neq 0$) が考えられるが, この解は $f(t-x) + g(t+x)$ と表わされ, まったく時間について解は減衰しない。こうして, この減衰度と, 大域解の存在は, 技術的な側面以上に本質的なものがある。

他の減衰を得られない例としては, 内部問題である。例えば, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界領域, に対して, 波動方程式,

$$\square u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

($\partial\Omega$ は Ω の境界で十分滑らかな hypersurface とする。)

もし、固有値問題 $\Delta v + \omega^2 v = 0 \quad \text{in } \Omega \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$

($\omega \neq 0$) の nontrivial な解 $v \in C^\infty$ を持つとき。

$u(t, x) = e^{it\omega} v(x)$ は決して減衰しない解である。

R. Racke (Bonn Univ.) は、[2] の手法を真似て、非線形波動方程式の radial solution は、有限時間内に爆発することを示した。

線形化方程式の解の減衰が期待できない場合の一つのアプローチとしては、weak solution を考えることにあると思う。1次元非線形双曲系の場合、むしろこちらからのアプローチの方が歴史は古く、成果もかなり上がっている。

しかし、多次元の内部問題の場合、筆者の知る限り、唯一藤原-高桑 A [3] の varifold solution である。残念ながら varifold sol. は weak sol. よりも弱い概念である。この方面のアプローチはこれから研究を待つ。

他のアプローチとしては、方程式にアタッチした、減衰を引き起こす効果を考えることである。理論的には、visco-thermoelasticity と呼ばれている分野である。本講演では特に viscosity (粘性) を考えた場合を扱うことにする。粘性を考える理由は、内部問題でさえ、良い解の減

衰を期待してである。方程式の代表的形は、

$$u_{tt} - \operatorname{div} \sigma(\nabla u) - \lambda \Delta u_t = 0$$

$$(\lambda > 0, \quad \nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

である。 $n=1$ の場合は古くから研究され、任意の滑らかな初期値に対して、大域解が存在することは、良く知られている。ここでは、余りに多くの文献の為に、それらも上げることが出来ないのので [1] の文献表に興味ある方は見ていただきたい。 $n=2$ の場合は Pecker 氏の仕事 [4] が代表的かと思われる。 $\lambda \Delta u_t$ の効果から、任意の滑らかな初期値に対して、解の存在を期待するわけであるが、多次元の場合は、それほど容易ではない。 $\sigma(\nabla u)$ の増大度に応じて、どの位のことが云えるかが、議論の一つのポイントである。最近の結果が、筆者の知るこの方面の仕事としては [5] を挙げておく。

一方、十分小さな初期値についてはどうかという点、福大の蛸原氏のいわゆる *strongly damped wave equation* :

$$u_{tt} - \Delta u_t - F(u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{の一連の研究}$$

[6 とその文献表] 及び、最近の溝畑-鶴岡 [7] の粘性流体中の波動方程式: $u_{tt} - a \Delta u - b \Delta u_t = c (|u|^{p-2} u)_t$ ($a > 0, b > 0, c \neq 0$) が筆者の知るところである。

我々の仕事 [1] は十分小かつ滑らかな初期値に対して、

u_j ($j \geq 2$) は (1) の解 u を作ったときの $\partial^j u$ の $t=0$ の値とある。これは、 u_0, u_1 から逐次出来ていく。 N を $N \geq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 3$ なる整数として、次の定理を得る。

定理: $\exists \varepsilon > 0$ s.t. もし、初期値が次の条件を満たせば、(1) は解 u

$$u \in \bigcap_{j=0}^{N-1} C^{j+1}([0, \infty); H^{N-j})$$

を一意的に決める。

初期値の条件 $N_0 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 3$ として

$$\|u_0\|_{N_0} + \sum_{j=0}^{N_0-1} \|u_{j+1}\|_{N_0-j} \leq \varepsilon$$

$$u_0 \in H^N \cap H_0^1, \quad u_{j+1} \in H^{N-j} \cap H_0^1 \quad (0 \leq j \leq N-1).$$

更に、解 u の energy は exponential decay である。□

更に、time-periodic solution の存在も示される。また、次の問題については、Cauchy problem 及び Neumann boundary condition 等が考えられる。

References

- [1] S.Kawashima and Y.Shibata: Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity, preprint in 1991.
- [2] S.Klainerman and A.Majda: Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string, *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), 241-263.
- [3] D.Fujiwara and S.Takakuwa: A varifold solution to the nonlinear equation of a vibrating membrane, *Kodai Math.J.* 9 (1986), 84-116 and its correction, *Ibid* 14 (1991), 310-311.
- [4] H.Pecher: On global regular solutions of third order partial differential equations, *J.Math.Anal.Appl.* 73(1980), 278-299.
- [5] A.Friedman and J.Necas: Systems of nonlinear wave equations with nonlinear viscosity, *Pacific J.Math.* 135 (1988) 29-55.
- [6] Y.Ebihara: On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation, *J.Diff.Eq's.* 30(1978),149-164; II, *ibid.* 34 (1979),339-352; III, *ibid.*45(1982),332-355.
- [7] K.Mizohata and S.Ukai: The global existence of small amplitude solutions to the nonlinear acoustic wave equation, preprint in 1991, *Dep. of Information Sci. Tokyo Inst. of Tech.*