

## Hilbert 多様体上の単調作用素

航空技研 岩官敏幸 (Toshiyuki Iwamiya)

徳山女子短大 大河内広子 (Hiroko Okochi)

### §1. 序

微分構造を持つ抽象空間  $X$  上の微分方程式の初期値問題

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni 0, & t > 0 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

を考える。 $X$  が線形位相空間の場合、この初期値問題が局所解をもつための作用素  $A$  の条件として、(イ)  $A$  がコンパクト作用素である、(ロ)  $A$  が単調作用素 (増大作用素) であるの 2 つの方向がある。ここでは、 $X$  が Hilbert 多様体のとき作用素の単調性が如何なるものになるかを考察する。

$X$  を一般の距離のはいつた微分多様体とし、 $X$  の距離を  $\rho$  とする。 $X$  が Hilbert 空間 [滑らかな Banach 空間] のとき、作用素  $A$  が単調 [増大] であることは、初期値の異なる (1.1) の任意の解  $u, v$  に対し、距離  $\rho(u(t), v(t))$  が  $t$  について単調非増加であること、すなわち、

$$\frac{d}{dt} \rho(u(t), v(t)) = \rho_x(u, v) \frac{d}{dt} u + \rho_y(u, v) \frac{d}{dt} v \leq 0$$

を導くものであることに注意する。但し、 $\rho_x$ 、 $\rho_y$  はそれぞれ  $\rho$  の第1成分、第2成分に関する Frechet 微分を表わす。従って、空間  $X$  が一般の距離空間の場合についても、 $A$  が単調 [増大] であることの定義を

$$(1.2) \quad -\rho_x Ax - \rho_y Ay \leq 0, \quad x, y \in D(A)$$

で与えることは自然であろう。

Hilbert 空間や Banach 空間の場合、初期値問題 (1.1) の解の存在を示すために、次の差分近似が利用されている。

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \text{分割 } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T \text{ に対し} \\ & \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + Ax_n \ni 0, \quad n=1, 2, \dots, N, \\ & \text{又は、} \lambda_n = t_n - t_{n-1} \text{ とおいて} \\ & x_n + \lambda_n Ax_n \ni x_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

本稿では、空間  $X$  を Hilbert 多様体とし、作用素  $A$  の単調性を定義し、単調作用素  $A$  によって与えられた初期値問題 (1.1) について、上述の差分近似を一般化し、 $\max_n (t_n - t_{n-1}) \rightarrow 0$  としたとき、(1.1) の解に収束することを示す。

## §2. 記号と定義

$M$  を完備な Hilbert 多様体とする。 $TM$  を接ベクトル束、

$T_x M$ ,  $x \in M$ , を  $x$  における接ベクトル空間とする。  $M$  上の Riemann inner product を

$$(\dot{x}, \dot{y})_x \quad \dot{x}, \dot{y} \in T_x M$$

で表わす。また、これに付随するノルムを  $F$  又は  $\|\cdot\|_x$  で表わす。すなわち、

$$F(x, \dot{x}) = \|\dot{x}\|_x = \sqrt{(\dot{x}, \dot{x})_x}, \quad \dot{x} \in T_x M$$

とおく。  $(U, \phi)$  を局所座標系とすると

$$M \supset U \xrightarrow{\phi} H, \quad TM|_U \xrightarrow{d\phi} U \times H \xrightarrow{P_2 \text{ (第2射影)}} H$$

が成立する。以下簡単のため、混乱を生じない限り、  $\dot{x} \in T_x M$  と  $P_2 \circ d\phi(\dot{x}) \in H$  を同一視する。各  $x \in U$  に対し、  $H$  上の正値自己共役作用素  $B(x)$  で

$$(\dot{x}, \dot{y})_x = (B(x)\dot{x}, \dot{y})_H, \quad \dot{x}, \dot{y} \in T_x M$$

を満たし、  $B(x)$ ,  $B(x)^{-1}$  が共に有界であるものが存在する。  $M$  の滑らかさとして、  $F$  が  $C^2$ -級であることを仮定する。すなわち、対応  $x \mapsto B(x)$  は  $C^2$ -級であるとする。

$M$  上の  $C^1$ -級の曲線  $v: [a, b] \rightarrow M$  に対し、  $v$  の 長さ  $l(v)$  は

$$l(v) = \int_a^b F(v(s), \dot{v}(s)) ds$$

で与えられる。  $M$  上の 距離  $\rho$  は

$$\rho(x, y) = \inf \{ l(v) : v: [a, b] \rightarrow M, v(a) = x, v(b) = y \}$$

で与えられる。測地線は、方程式

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{x}}(v(s), \dot{v}(s)) - F_x(v(s), \dot{v}(s)) = 0$$

を満たす曲線として定義される。

exponential map は以下で定義される:  $x \in M$ ,

$\dot{x} \in T_x M$  に対し、

$$\exp_x \dot{x} = \begin{array}{l} v(0) = x, \dot{v}(0) = \dot{x}, l(v) = \|\dot{x}\|_x \text{ を} \\ \text{満たす測地線 } v \text{ の終点} \end{array}$$

ここで、仮定より  $F(x, \dot{x}) (= \|\dot{x}\|_x)$  が  $C^2$ -級であるから、任意の  $x \in M$  と  $\dot{x} \in T_x M$  に対し、定義の条件を満たす測地線  $v$  が存在することに注意する。

陰関数定理により次が成立する。

性質 2.1. 任意の  $x \in M$  に対し、 $x$  の近傍  $U$  を適当に選べば次が成立する。

(P1) 任意の  $y, z \in U$ ,  $y \neq z$ , に対し、 $y$  と  $z$  を結ぶ最短測地線  $v$  が一意に存在する。すなわち、測地線  $v: [a, b] \rightarrow M$  で、 $v(a) = y$ ,  $v(b) = z$ ,  $l(v) = \rho(y, z)$  を満たすものが一意に存在する。

いま、 $x$  の近傍  $U$  を性質 (P1) をもつようにとる。  $y, z \in U$  とし、 $y$  と  $z$  を結ぶ最短測地線を  $v: [a, b] \rightarrow M$  とする。このとき、Hilbert空間の場合のベクトル  $z - y$  に対応する

ものとして、記号 " $z \leftarrow y$ " によって、 $y$  における接ベクトル  $\rho(y, z) \dot{v}(a) / \|\dot{v}(a)\| \in T_y M$  を表わすことにする。すなわち、

$$z = \exp_y(z \leftarrow y).$$

定義より、 $\|z \leftarrow y\|_y = \|y \leftarrow z\|_z = \rho(y, z)$  に注意しておく。

次が成立する。

性質 2.2. 距離  $\rho(x, y)$  は局所的に  $C^2$ -級である。すなわち、 $U \times U \setminus \Delta$  (但し  $\Delta = \{(x, x) \in M \times M\}$ ) 上で  $C^2$ -級である。更に、任意の  $U$  上の  $C^1$ -級曲線  $u: [a, b] \rightarrow U$ ,  $u(a) = x$ ,  $\dot{u}(a) = \dot{x}$  と点  $y \in U$  に対し

$$(2.1) \quad \left. \frac{d^+}{dt} \rho(u(t), y)^2 \right|_{t=a} = -2(\dot{x}, y \leftarrow x)_x$$

が成立する。

作用素の単調性に関して、不等式 (1.2) に着目し、次の様に定義する。

定義 2.1.  $A: D(A) \subset M \rightarrow TM$  を  $Ax \subset T_x M$  なる多価作用素とする。  $A$  が 単調 であるとは、次が成立することをいう。

$$\left. \frac{d^+}{d\lambda} \rho(\exp_{x_1} \lambda \dot{x}_1, \exp_{x_2} \lambda \dot{x}_2) \right|_{\lambda=0} \geq 0$$

$$x_i \in D(A), \quad \dot{x}_i \in Ax_i, \quad i=1, 2.$$

従って (2.1) を用いれば、各  $\Gamma$  に対し

$$(2.2) \quad (\dot{x}_1, x_2 \leftarrow x_1)_{x_1} + (\dot{x}_2, x_1 \leftarrow x_2)_{x_2} \leq 0$$

$$x_i \in D(A) \cap \Gamma, \dot{x}_i \in Ax_i, i=1, 2$$

が成立する。

注意 2.1. Hilbert 多様体の場合は、作用素  $A$  を接ベクトル束  $TM$  の部分集合として定義するほうが自然であり、これは、Hilbert 空間の場合の  $A$  のグラフに対応するものであるが、従来の捉え方との対応をわかりやすくするために  $TM$  の多価の断面として与えた。

接ベクトル束  $TM$  上には、通常の強位相の他に、基底空間  $M$  の強位相と接ベクトル空間の弱位相から導入される弱い位相がはいることに注意する。この位相を (強位相)  $\times$  (弱位相) と書くことにする。

定義 2.2.  $A$  が 極大単調 であるとは、 $A$  の単調な拡張が  $A$  のみであることをいう。

このとき、次が成立する。

命題 2.1.  $A$  が極大単調ならば、 $A$  のグラフは (強位相)  $\times$  (弱位相) で閉じている。

### §3. 結果

$A: D(A) \subset M \rightarrow TM, Ax \subset T_x M$  を単調作用素と

する。  $T > 0$  とする。分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  に対する差分近似 (1.3) を Hilbert 多様体の場合へ拡張したものを下記で与える。

$$(3.1) \quad \frac{x_{n-1} \leftarrow x_n}{t_{n-1} - t_n} + Ax_n \ni 0, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

また、(1.3) の一般化として、悪いふるまいをしない小さい誤差を許した差分近似を、Hilbert 多様体の場合へ拡張したものは下記で与える。

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon > 0 \text{ とし, } \bar{x}_{n-1}, x_n \in U, \quad n=1, 2, \dots, N, \\ \frac{\bar{x}_{n-1} \leftarrow x_n}{t_{n-1} - t_n} + Ax_n \ni 0, \\ \rho(\bar{x}_{n-1}, x_{n-1}) \leq (t_n - t_{n-1}) \varepsilon. \end{cases}$$

いま、 $\varepsilon > 0$  とし、区間  $[0, T]$  の分割  $0 = t_0^\varepsilon < t_1^\varepsilon < \dots < t_{N(\varepsilon)}^\varepsilon = T$  で  $\max_n (t_n^\varepsilon - t_{n-1}^\varepsilon) \leq \varepsilon$  なるものに対し、 $x_n \in U$ ,  $n=1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ , を差分近似 (3.2) を満たすものとする。このとき、方程式 (1.1) の  $\varepsilon$ -近似解  $u_\varepsilon$  を次で与える。

$$(3.3) \quad \begin{cases} u_\varepsilon(t) = x_n^\varepsilon, & t \in (t_{n-1}^\varepsilon, t_n^\varepsilon], \quad n=1, 2, \dots, N(\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0) = x_0 \end{cases}$$

この  $u_\varepsilon$  について次の定理を得る.

定理 3.1. ( $u_\varepsilon$  の収束)  $A$  を単調作用素とする. 正数  $T$  が存在して,  $\varepsilon > 0$  に対し, 区間  $[0, T]$  上の  $\varepsilon$ -近似解の列  $\{u_\varepsilon\}$  が存在するとする. このとき, 曲線  $u: [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$  が存在して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \rho(u_\varepsilon(t), u(t)) = 0, \quad [0, T] \text{ 上一様.}$$

更に,  $u$  は次の i) ~ iii) を満たす.

i)  $u(0) = x_0$

ii)  $u$  は Lipschitz 連続でその Lipschitz 定数は  $\|Ax_0\|_{x_0}$

iii) 任意の  $0 \leq t < T$ ,  $x \in D(A) \cap \mathcal{U}$ ,  $\dot{x} \in Ax$  に対し,

$$\rho(u(t), x)^2 - \rho(u(t), x)^2 \leq -2 \int_0^t (\dot{x}, u(\xi) - x)_x d\xi$$

但し,  $\|Ax\|_x = \inf \{ \|\dot{x}\|_x; \dot{x} \in Ax \}$ ,  $x \in D(A)$ , とした.

強解の存在を保証するために,  $A$  の 値域条件 として, 次の  $(R_1)$  又はその一般化である  $(R_2)$  を考えることができる.

$(R_1)$  各  $x \in D(A)$  に対し, 性質  $(P1)$  をもつ  $x$  の近傍  $\mathcal{U}$  と

$\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$  が存在して次を満たす:  $0 < \forall \lambda < \varepsilon$

に対し  $x_\lambda \in D(A) \cap \mathcal{U}$  が存在して  $\frac{x - x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$



を満足する。

(R<sub>2</sub>) 各  $x \in D(A)$  と各  $\delta > 0$  に対し、 $x$  の近傍  $\mathcal{U}$  で性質 (P1) をもつものと  $\varepsilon = \varepsilon(x, \delta) > 0$  が存在して次を満足す:  $0 < \forall \lambda < \varepsilon$  に対し、 $x_\lambda \in D(A) \cap \mathcal{U}$ ,  $y_\lambda \in \mathcal{U}$  が存在して、 $f(y_\lambda, x) \leq \lambda \delta$ ,  
 $\frac{y_\lambda - x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$ ,  $\|y_\lambda - x_\lambda\|_{x_\lambda} \leq \lambda \|Ax_\lambda\|_x e^{\lambda \delta}$   
 を満足する。

次の定理を得る。

定理 3.2. (強解の大域的存在)  $A$  が極大単調作用素で条件 (R<sub>2</sub>) を満足しているとする。このとき、各  $x_0 \in D(A)$  に対し、初期値問題 (1.1) の強解  $u \in W^{1, \infty}([0, \infty); M)$  が存在する。

#### §4. 定理の証明の概略

定理 3.1 と 3.2 を証明するため、幾つかの補題を準備する。

補題 4.1.  $\mathcal{U} \subset M$  を性質 (P1) を持つものとする。  $x_k \in D(A) \cap \mathcal{U}$ ,  $\dot{x}_k \in Ax_k$ ,  $k=1, 2$ , とする。このとき、各  $\lambda > 0$  で  $\exp_{x_k}(\mu \dot{x}_k) \in \mathcal{U}$ ,  $0 < \mu \leq \lambda$ ,  $k=1, 2$ , を満足すものに対し、

$$\rho(x_1, x_2) \leq \rho(\exp_{x_1}(\lambda \dot{x}_1), \exp_{x_2}(\lambda \dot{x}_2)) \\ + |\partial^2 \rho| \lambda^2 \{ \|\dot{x}_1\|_{x_1} + \|\dot{x}_2\|_{x_2} \}^2.$$

但し、 $|\partial^2 \rho| = \sup \{ |\rho_{xx}(x, y)|_{T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}}, |\rho_{yy}(x, y)|_{T_x M \times T_y M \rightarrow \mathbb{R}} : x, y \in U \}$  とした。

証明.  $\mu \in (0, \lambda]$  に対し、 $f(\mu) = \rho(\exp_{x_1}(\mu \dot{x}_1), \exp_{x_2}(\mu \dot{x}_2))$  とおく。このとき

$$f(\mu) \geq f(0) + f'(0)\mu - |\partial^2 \rho| \{ \mu \|\dot{x}_1\|_{x_1} + \mu \|\dot{x}_2\|_{x_2} \}^2.$$

従って、定義 2.1 より  $f'(0) \geq 0$  に注意すれば、補題 3.1 の結論を得る。

補題 4.1 より次の補題を得る。

補題 4.2.  $U$  を  $x_0$  の近傍で性質 (P1) をもつものとする。

$\lambda, \mu > 0$  とし、 $y \leftarrow y_\lambda \in \lambda A y_\lambda$ ,  $z \leftarrow z_\mu \in \mu A z_\mu$ ,  $y, z, y_\lambda, z_\mu \in D(A) \cap U$  とする。このとき

$$\frac{1}{\lambda} \{ \rho(y_\lambda, z_\mu) - \rho(y, z_\mu) \} + \frac{1}{\mu} \{ \rho(y_\lambda, z_\mu) - \rho(y_\lambda, z) \} \\ \leq |\partial^2 \rho| \{ \lambda \|A y_\lambda\|_{y_\lambda} + \mu \|A z_\mu\|_{z_\mu} \}.$$

補題 4.3.  $x \in D(A)$  とする。  $U$  を  $x$  の近傍で性質 (P1) をもつものとする。  $\lambda > 0$  とし、 $x \leftarrow x_\lambda \in \lambda A x_\lambda$ ,  $x_\lambda \in D(A)$  とする。このとき

$$(4.1) \quad \left\| \frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \right\|_{x_\lambda} \leq \inf_{\dot{x} \in Ax} \|\dot{x}\|_x \quad (\equiv \|Ax\|).$$

証明.  $\dot{x} \in Ax$  とする。  $\frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$  に注意すれば

(2.2) より

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left( \frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda}, x \leftarrow x_\lambda \right)_{x_\lambda} + (\dot{x}, x_\lambda \leftarrow x)_x \\ &\geq \frac{1}{\lambda} \|x \leftarrow x_\lambda\|_{x_\lambda}^2 - \|\dot{x}\|_x \|x_\lambda \leftarrow x\|_x. \end{aligned}$$

$\|x \leftarrow x_\lambda\|_{x_\lambda} = \|x_\lambda \leftarrow x\|_x$  より

$$\left\| \frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \right\|_{x_\lambda} \leq \|\dot{x}\|_x$$

$\dot{x} \in Ax$  の任意性より補題が証明される。

定理3.1は、補題4.2と4.3を用いて、通常のBanach空間における発展方程式の差分近似の収束定理と同様の議論により、証明される。(文献[1]を参照。)

定理3.2は、次の手順で証明される。まず、 $A$ の値域条件 $(R_2)$ より、各 $\varepsilon > 0$ に対し、 $\varepsilon$ -近似 $u_\varepsilon: [0, \infty) \rightarrow M$ が存在することに注意する。実際、 $x_0$ の開近傍 $\mathcal{U}_1$ で性質 $(P1)$ をもつものに対し、適当な正数 $T_1$ が存在して、 $\varepsilon$ -近似解 $u_\varepsilon: [0, T_1] \rightarrow \mathcal{U}_1$ がある。 $u_\varepsilon(T_1)$ を改めて初期値と考えれば、 $u_\varepsilon(T_1)$ の開近傍 $\mathcal{U}_2$ で性質 $(P1)$ をもつものに

対し、正数  $T_2 > T_1$  が存在して  $\varepsilon$ -近似解  $u_\varepsilon: [T_1, T_2] \rightarrow U_2$  がある。これをくり返して、 $\varepsilon$ -近似解  $u_\varepsilon: [0, \sup T_k) \rightarrow M$  が決まる。不等式(4.1)より、 $\sup_k T_k < +\infty$  ならば  $u_\varepsilon(T_k)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , が  $M$  の点  $u_\varepsilon(T_\infty)$  に強収束することを利用して、 $\sup_k T_k = +\infty$  を得る。

次に  $u: [0, \infty) \rightarrow M$  を定理3.1で得られた弱解とする。この  $u$  が(1.1)の強解であることを示すために、 $T > 0$  を固定し、局所座標系  $(U, \phi)$  を  $u: [0, T] \rightarrow U$  ととる。  $\phi \circ u: [0, T] \rightarrow H$  が Lipschitz 連続であり、Hilbert空間が Radon-Nikodym property をもつことより、 $\phi \circ u \in W^{1, \infty}([0, T]; H)$  である。よって  $u \in W^{1, \infty}([0, T]; U)$  である。従って、定理3.2の仮定を用いれば、a.e.  $t > 0$  で  $u(t) \in D(A)$  かつ(1.1)が成立することを得る。

## 文献

- [1] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 640-665.
- [2] Y. Kōmura, Nonlinear semigroups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493-

507.

[3] S. Lang, Differential manifold, springer, 1985.

[4] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊國屋書店, 1977.