数理解析研究所講究録
第 787 巻 1992 年 72-94

導関数のリプシッツ行列を用いた区間写像について

On Interval Function Using Lipschitz Matrix of Derivative

早大理工　柏木　雅英　(Masahide Kashiwagi)
早大理工　大石　進一　(Shin'ichi Oishi)

1. はじめに

工学上の様々な場面において，非線形の連立方程式を解くことが要求されている．非線形方程式は解析的に解けることはほとんどないため，数値計算によって近似的に解くことになる．この場合，計算結果の誤差評価が極めて重要である．すなわち，あるδが計算でき，近似解のδ近傍に真解の存在を保証する必要がある．

非線形方程式を解いて得られた近似解の事後誤差評価を行うための手法は，大きく分けて次の二つが知られている．

一つは，カントロビッチの定理や占部の定理などの，ニュートン法の収束定理を利用する方法である．これらの定理は，近似解を中心とする唯一解領域の決定を行うことが出来る．

当然そのときは，近似解を初期点とするニュートン法の真解への収束が保証される．これは，点列を生成する写像に対して縮小写像原理を適用することにより証明される．

二つ目は，Krawczyk流の区間写像を用いる方法である[1]．区間演算では，計算機による数値計算の際に発生する丸め誤差の影響を把握するために考えられた手法で，数値を２つの浮動小数点数の間の区間で表現し演算を行う．適当な区間写像（区間から区間への写像）を用いると，縮小写像原理の成立を確かめられることが知られている．

もし，fが完全なブラックボックスで，$x \in D$を与えれば出力f(x)が返され，他にfに関する情報を得る手段はないとすると，このような解の存在保証や誤差評価は当然不可能である．ニュートン法の収束定理は，近似解の近傍における導関数のリプシッツ定数が分かること，区間演算を用いる方法では，fの区間包囲となる区間写像が構成できることを仮定している．

両者は，ともに局所的な解法である．すなわち，十分よい近似解が得られている必要があり，それを得るためには何か他の手段を用いねばならない．

ここで，非線形方程式が非線形写像$f:D \subset R^n \to R^n$を用いて$f(x)=0$と書かれているとし，何らかの数値解法により，方程式$f(x)=0$の近似解のx_0が得られたとき，近似解の誤差評価を

行うことを考える．このような問題に対して，我々は従来，導関数のリプシッツ定数を関数の定義域全体で見積もり，それを用いて占部の定理の成立を確かめるという手法を採ってきた[2]．

しかし，これをKrawczyk流の区間写像を用いて行うことを考えると，極めて大きな不都合が生じる．占部の定理の場合は，近似解x_0における$f(x_0)$と$f'(x_0)$を計算すれば，唯一解領域を与えるような近傍の大きさδを事後的に決定することが出来た．しかし，区間演算を用いる場合は，近傍の大きさ（近似解を含む区間の大きさ）を事前に与えねば唯一解領域であるか否かの判定が出来ないため，区間の大きさの適切な（近似解の近似の度合いに適した）決定を行わなければならない．

本稿では，そのようなKrawczyk流区間写像の持つ問題点を解決するため，導関数のリプシッツ行列を用いた新しい区間写像を提案する．これを用いれば，占部の定理を用いた場合と同様な事後的な区間の大きさの決定が可能となる．また，その区間写像における解の存在判定において，解の存在条件を区間演算を含まない不等式に帰着させることができ，計算量の多い区間演算を使う必要がないことを示す．

2. 準備

本節では，本稿で用いる区間演算の用語について説明する．

$D \subset R^n$における区間ベクトルの集合を$I(D)$で表す．また，区間，区間ベクトル，または区間行列Iの中心，半径，絶対値を，

mid(I)　（各区間の中心によるスカラー，ベクトル，または行列）

rad(I)　（各区間の半径による〃）

$|I|$　（各区間の絶対値の最大値による〃）

で表す．

区間，区間ベクトル，区間行列の間の演算は，通常の演算$*$に対して

$$I_1 * I_2 = \{x_1 * x_2 \mid x_1 \in I_1,\ x_2 \in I_2\}$$

で定める．

また，ベクトル$x, y \in R^n$の半順序を$\omega \in \{\leqq, <, \geqq, >\}$として

$$x\ \omega\ y \Leftrightarrow x_i\ \omega\ y_i \quad \text{for all } i \qquad (2.1)$$

で定めることにする．

区間ベクトル及び区間行列のノルムは，ノルムは，最大値

ノルムを一般化した次のノルムで定める.

[定義1] (scaled maximum norm)

与えられたscaling vector $u \in R^n$, $u > 0$に対して, 区間ベクトル$I \subset I(R^n)$のノルムを

$$\| I \|_u = \max \{ \, | I_i | / u_i \; | \; \text{for all } i \} \tag{2.2}$$

で, 区間行列Aのノルムを

$$\| A \|_u = \max \{ \| AI \|_u \; | \; \| I \|_u = 1 \}$$
$$= \| \, | A | u \|_u \tag{2.3}$$

で定める. ■

$u = (1, 1, \cdots, 1)^t$のときは, 通常の最大値ノルムになる.

通常の$D \subset X = R^n$から$Y = R^m$への写像fをもとに構成された$I(D)$から$I(Y)$への写像を一般に区間写像という.

[定義2] (区間包囲, 区間拡張)

$X = R^n$, $Y = R^m$, $D \subset X$とする. 区間写像$F : I(D) \to I(Y)$が$f : D \to Y$の区間包囲であるとは,

$$F(I) \supset f(I) \quad \text{for all } I \in I(D) \tag{2.4}$$

が成立することをいう. また, Fがfの区間拡張であるとは, Fがfの区間包囲で,

$$F(x)=f(x) \quad \text{for all } x \in D \tag{2.5}$$

が成立することをいう. ■

加減乗除などの二項演算, sin, logなどの単項演算の区間包囲は計算機上で容易に実現できる. 従って, これらの基本演算の組み合わせで記述された関数の区間包囲も容易に実現できる. しかし, 有限桁の浮動小数点演算を用いる限り, 厳密な意味での区間拡張の実現は困難である.

3. Krawczykの区間写像

非線形方程式が $f: D \subset R^n \to R^n$ を用いて $f(x)=0$ と書かれているとする. このとき, 近似解の誤差評価と反復改良のためにKrawczykが定義した区間写像は,

$$K(I) = c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}F'(I))(I - c) \tag{3.1}$$

$$c = \mathrm{mid}(I) \tag{3.2}$$

で表される. ただしEは単位行列, LはIでの微分を近似する行列, 区間写像F'は導関数f'の区間包囲である.

このK(I)に関して,

$$K(I) \subset \mathrm{int}(I) \tag{3.3}$$

（int(I)はIの内点集合）

が成立すれば，簡易ニュートン反復を定義する写像

$$g(x) = x - L^{-1}f(x) \tag{3.4}$$

に対する縮小写像原理が適用でき，I内に$f(x)=0$の解が唯一存在することが保証される．解の精度を上げるには，

(1) I内の任意の点を初期点として(3.4)を用いた反復を行う．

(2) Iを初期区間として(3.1)を用いた区間反復を行う．

などの方法があり，ともに収束定理が得られる．

簡易ニュートン法の収束を保証する占部の定理は，全く同様に縮小写像原理から導かれる．しかし，占部の定理はノルムを用いた条件であるため，成分ごとの評価が行われる式(3.3)の条件と比べるとかなり効率が悪い．

また，占部の定理を用いた場合，近似解のδ近傍における$\| L - f'(x) \|$の上界を見積もる必要がある．この値を見積もるために，従来我々の研究では定義域全体において導関数f'がα-リプシッツ連続であり，この定数αの値が予め分かっているという仮定を置いた．このような不自然な仮定を要求する占部の定理に対して，Krawczykの区間写像では導関数の区間拡張F'を利用するという自然で実現し易い方法を採り，そ

のような定数の見積もりを回避している.

ここで，ある近似解x_0が与えられたとき，それを元にして真解の包み込みを行う問題を考える．占部の定理を用い，微分の近似LをL=$f'(x_0)$とした場合は，

$$\| f'(x_0)^{-1} \| (\| f(x_0) \| + \alpha \delta^2) < \delta \qquad (3.5)$$

を満たすδに対して，x_0のδ近傍が唯一解領域であることが保証される．すなわち，

$\| f'(x_0)^{-1} \|$と$\| f(x_0) \|$を計算したあとに最適なδを決定することが出来る.

これに対して，Krawczykの区間写像を用いる場合は，x_0を含む区間Iを先に決定しなければそのIが唯一解領域であることの判定が出来ない．従って，仮に十分良い近似解が得られていても，Iが不適切であるが為にそこで真解の包み込みに失敗することがある．このように近似解が得られたとき適切な初期区間を決定するアルゴリズムとして，文献[3]の方法があるが，最適な初期区間を得られる保証はされていないようである.

4. 導関数のリプシッツ行列を用いた区間写像

区間演算を用いた真解の包み込みにおいて最適な初期区間を得るために，導関数のリプシッツ行列を用いた区間写像を提案する．占部の定理において最適な近傍の大きさの決定が可能だったのは，導関数のリプシッツ定数が分かっているという仮定のためである．従って，区間演算においても同様のことが行えるはずである．

Krawczykの区間写像の構成の基礎となっているものは，平均値の定理である．Krawczykの区間写像K(I)は，簡易ニュートン反復のための写像（式(3.4)）の区間包囲となっていることが重要である．区間包囲を構成するための手法として，単純に簡易ニュートン反復の写像の計算過程を区間演算に置き換えるのでなしに，区間の中心での値と区間内における微分のenclosureを用いて，平均値の定理により区間包囲となることを保証している．このような区間包囲の構成法は，一般にmean value formと呼ばれている．これを，次の定理1に示す．

［定理1］（mean value form）

$U\subset R^n$, $f:U\to R^m$をC^1級とする．区間$I\subset I(U)$に対して，区間行列Aが

$$A \supset \{f'(x) \mid x \in I\} \tag{4.1}$$

を満たすとする．このとき，区間写像$F:I(U)\to I(R^m)$を

$$F(I) = f(c) + A(I-c) \tag{4.2}$$

$$c = \mathrm{mid}(I) \tag{4.3}$$

で定めると，

$$F(I) \supset \{f(x) \mid x \in I\} \tag{4.4}$$

が成立する．■

ところで，このmean value formでは平均値の定理に基づくため1次微分しか用いられないが，Taylorの定理を用いれば高階微分を用いた区間包囲の構成法が得られる．ここでは，これを利用して導関数のリプシッツ行列を用いた区間写像の構成を考える．

まず，1次のTaylorの定理によるmean value formを示す．

［定理２］（1次のTaylorの定理によるmean value form）

$U\subset R^n$，$f:U\to R^m$をC^2級とする．区間$I\subset I(U)$に対して，区間立体行列Aが

$$A \supset \{f''(x) \mid x \in I\} \tag{4.5}$$

を満たすとする．このとき，区間写像$F:I(U)\to I(R^m)$を

$$F(I) = f(c) + f'(c)(I-c) + \frac{1}{2} A(I-c)(I-c) \tag{4.6}$$

$$c = \mathrm{mid}(I) \tag{4.7}$$

で定めると，

$$F(I) \supset \{ f(x) \mid x \in I \} \tag{4.8}$$

が成立する．■

［証明］（定理２）

$c+h \in I$とすると，平均値の定理により

$$f(x+h) = f(c) + f'(c)h + \int_0^1 (1-t) f''(c+th) h^2 dt \tag{4.9}$$

が成立する．$c+th \in I$，$h \in I-c$を考慮すると，

$$\int_0^1 (1-t) f''(c+th) h^2 dt$$

$$\in A(I-c)(I-c) \int_0^1 (1-t) dt$$

$$= \frac{1}{2} A(I-c)(I-c) \tag{4.10}$$

が成立する．以上により，題意が示された．■

ここに登場するAは，$x, y \in I$に対して，

$$f'(x) - f'(y) = A_0 (x-y) \quad \text{for some } A_0 \in A \tag{4.11}$$

を満たすので，導関数のIにおけるリプシッツ行列と呼ばれる

ものに当たり，成分ごとに評価された導関数のリプシッツ定数である．

このmean value formを用いた区間写像による解の包み込みと解の精度の反復改良について，次の定理３に示す．

［定理３］（導関数のリプシッツ行列を用いた区間写像）

$U \subset R^n$，$f: U \to R^n$をC^2級とする．ある区間$I_0 \in I(U)$について，区間行列Mを

$$M = E - L^{-1}f'(c_0) - (L^{-1}A)(I_0 - c_0) \tag{4.12}$$

$(c_0 = \mathrm{mid}(I_0))$

で，区間ベクトルVを

$$V = c_0 - L^{-1}f(c_0) + (E - L^{-1}f'(c_0))(I_0 - c_0) - \frac{1}{2}(L^{-1}A)(I_0 - c_0)(I_0 - c_0) \tag{4.13}$$

$$c_0 = \mathrm{mid}(I_0) \tag{4.14}$$

で定義する．ただし，Eは単位行列，Lは（I_0における微分の近似である）非区間行列，Aは$A \supset f''(I_0)$を満たす区間立体行列とする．

ここで，

$$V \subset I_0 \tag{4.15}$$

$$\|M\| < 1 \tag{4.16}$$

が満たされるならば，以下が成立する．

(1) I_0に方程式$f(x)=0$の解x^*が唯一存在する.

(2) 区間反復を

$$I_{n+1} = I_n \cap [c_n - L^{-1}f(c_n) + M(I_n - c_n)]$$

$$(c_n = \mathrm{mid}(I_n)) \tag{4.17}$$

で定義すると,

$$x^* \in I_n \quad \text{for all } n. \tag{4.18}$$

$$\| \mathrm{rad}(I_{n+1}) \| \leqq \| M \| \cdot \| \mathrm{rad}(I_n) \| \tag{4.19}$$

が成立する.

(3) $\forall x_0 \in I_0$から出発する簡易ニュートン反復

$$x_{n+1} = x_n - L^{-1}f(x_n) \tag{4.20}$$

に対して,

$$x_n \in I_0 \quad \text{for all } n. \tag{4.21}$$

$$x_n \to x^* \quad \text{as } n \to \infty \tag{4.22}$$

$$\| x_n - x^* \| \leqq \| L^{-1}f(x_n) \| / (1 - \| M \|) \tag{4.23}$$

$$\| x_n - x^* \| \leqq \| M \|^n \| L^{-1}f(x_0) \| / (1 - \| M \|) \tag{4.24}$$

が成立する. ■

証明の前に,次の補題1を挙げておく.

[補題1] Aを$m \times n$区間行列,Bを$n \times p$区間行列とするとき,$\mathrm{mid}(B)=0$ならば,

$$AB = |A|B = [-|A||B|,\ |A||B|]$$
$$= [-1,1]|A||B| \tag{4.25}$$

が成立する．■

ただし，[X, Y]（X,Yは非区間行列）は，各成分の上限，下限をそれぞれ，行列X,Yの対応する成分とするような区間行列を表す．

定理３の証明を示す．

［証明］（定理３）

まず，写像$g: I_0 \to R^n$を

$$g(x) = x - L^{-1}f(x) \tag{4.26}$$

で定義すると，gは$\|M\|$を縮小定数とする縮小写像となることを示す．

$g'(x) = E - L^{-1}f'(x)$ に対する mean value formをI_0に対して構成すると，

$$E-L^{-1}f'(c_0)-(L^{-1}f''(I_0))(I_0-c_0) \tag{4.27}$$

となるので，

$$M \supset g'(I_0) \tag{4.28}$$

の成立が分かる．また，(4.13)はgに対して定理２を適用したものであるから，

$$V \supset g(I_0) \qquad (4.29)$$

が分かる．以上の結果と，(4.15)，(4.16)を合わせると，gが I_0において‖M‖を縮小定数とする縮小写像であることが分かる．これにより，結果の(1)，(3)が縮小写像原理により得られる．

最後に(2)の成立を示す．(4.19)の成立は，(4.17)と補題1により

$$\begin{aligned}
rad(I_{n+1}) &\leq rad(c_n - L^{-1}f(c_n) + M(I_n - c_n)) \\
&= rad(M(I_n - c_n)) \\
&= rad([-1,1]\,|M|\,|I_n - c_n|) \\
&= |M|\,|I_n - c_n| \\
&= |M|\,rad(I_n) \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

となることから，両辺のノルムを取れば分かる．

(4.18)の成立を帰納法で示す．今，n=kで(4.18)が成立しているとする．このとき，(4.17)の右辺第2項はI_nに対して定理1を適用したものであるから，$g(I_n)$を含み，従ってx^*（gの不動点）を含む．よってI_{n+1}もx^*を含むことが分かる．以上により，(4.18)の成立が示された．■

5. 実際の計算

ここでは，本稿で提案された区間写像を実際に近似解の誤差評価に用いる場合について議論する．

定理3の成立を確認するためには，I_0の中心c_0における$f(c_0)$，$f'(c_0)$の他に，$A \supset f''(I_0)$を満たす導関数のリプシッツ行列Aが必要である．これをI_0によらず見積もれるようにするために，Aとして

$$A \supset f''(U) \tag{5.1}$$

を満たすものを用いることにする．このようなAは，fがC^2級で定義域Uが有界ならば存在する．このようにすれば，与えられたc_0に対して，定理3の成立するようなI_0（中心がc_0である区間）が存在するかどうかの判定，存在する場合のI_0の計算が原理的には可能となる．

しかし，その判定は，(4.13)，(4.15)を見れば分かるように，I_0の各成分に関する連立2次不等式で，更に，区間演算を用いた複雑なものである．これでは，実用的とはいいがたい．

そこで，(4.15)の判定条件を，より単純で，なおかつ区間演算を含まないものに置き換えることを考える．それは，次の定理4のようになる．

[定理4]

区間$I \in I(R^n)$に対する区間写像$V(I)$を

$$V(I) = c - L^{-1}f(c) + (E - L^{-1}f'(c))(I - c)$$

$$- \frac{1}{2}(L^{-1}A)(I - c)(I - c) \qquad (5.2)$$

$$(c = \mathrm{mid}(I))$$

で定める. ただし, Eは単位行列, Lは正則な非区間行列, Aは区間立体行列とする.

また, 区間Iを

$$I = [-w, w] + c, \quad w \in R^n \qquad (5.3)$$

で表す.

このとき,

$$V(I) \subset I \quad \Leftrightarrow \qquad (5.4)$$

$$|L^{-1}f(c)| + |E - L^{-1}f'(c)|w + \frac{1}{2}(|L^{-1}A|w)w \leqq w$$

$$(5.5)$$

が成立する. ■

証明の前に, 次の補題2を示す.

[補題2] A, Bを区間行列とするとき, mid(B)=0ならば,

$$|A + B| = |A| + |B| \qquad (5.6)$$

が成立する．■

定理４の証明を示す．

［証明］（定理４）

$$V(I)\subset I$$

$$\Leftrightarrow\quad V(I)-c\subset I-c$$

$$\Leftrightarrow\quad |V(I)-c|\leqq w \qquad (5.7)$$

であるから，(5.5)より，

$$|V(I)-c| = |L^{-1}f(c)| + |E-L^{-1}f'(c)|w + \frac{1}{2}(|L^{-1}A|w)w \qquad (5.8)$$

を示せば良い．

補題１により，

$$(E-L^{-1}f'(c))(I-c)=[-1,1]|E-L^{-1}f'(c)|w \qquad (5.9)$$

$$\frac{1}{2}(L^{-1}A)(I-c)(I-c) = \frac{1}{2}([-1,1]|L^{-1}A|w)(I-c) = \frac{1}{2}[-1,1](|L^{-1}A|w)w \qquad (5.10)$$

が成立する．すなわち，(5.8)の右辺第2,3項は原点対称な区間であり，補題２を用いると，

$$
\begin{aligned}
&|V(I)-c| \\
&\quad = |-L^{-1}f(c)+(E-L^{-1}f'(c))(I-c) \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}(L^{-1}A)(I-c)(I-c)| \\
&\quad = |L^{-1}f(c)| + |E-L^{-1}f'(c)|w \\
&\qquad +\tfrac{1}{2}(|L^{-1}A|w)w \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

が分かる．以上により題意は示された．■

また，(4.16)の条件は，次の定理５のように区間演算を含まない条件に置き換えられる．

[定理５]

区間$I \in I(R^n)$区間行列を対応させる区間写像$M(I)$を

$$M(I) = E - L^{-1}f'(c) - (L^{-1}A)(I-c)$$

$$(c = mid(I)) \qquad (5.12)$$

で定める．ただし，Eは単位行列，Lは正則な非区間行列，Aは区間立体行列とする．また，区間Iを

$$I = [-w, w] + c,\ w \in R^n \qquad (5.13)$$

で表す．

このとき，

$$\| M(I) \| < 1 \quad \Leftrightarrow \qquad (5.14)$$

$$\| \, |E-L^{-1}f'(c)| + |L^{-1}A|w \, \| < 1 \qquad (5.15)$$

が成立する. ■

[証明] (定理5)

$$\| M(I) \| = \| \ |E - L^{-1} f'(c)| + |L^{-1}A| w \| \tag{5.16}$$

を示せば良い.

補題1により,

$$(L^{-1}A)(I - c) = [-1, 1] \ |L^{-1}A| w \tag{5.17}$$

が成立. よって補題2を用いると,

$$\begin{aligned} \| M(I) \| &= \| \ |M(I)| \ \| \\ &= \| \ |E - L^{-1} f'(c) - (L^{-1}A)(I - c)| \ \| \\ &= \| \ |E - L^{-1} f'(c)| + |L^{-1}A| w \| \end{aligned} \tag{5.18}$$

の成立が分かる. ■

定理4, 定理5により, 近似解cを用いた区間 $I = [-w, w] + c$ が唯一解領域であるための条件は,

$$|L^{-1} f(c)| + |E - L^{-1} f'(c)| w + \frac{1}{2} (|L^{-1}A| w) w \leqq w \tag{5.19}$$

$$\| \ |E - L^{-1} f'(c)| + |L^{-1}A| w \| < 1 \tag{5.20}$$

の2つとなった. 適当な近似解cと正則な微分の近似Lが与えられたとき, これらの不等式を満たすベクトル $w>0$ が存在するかどうかを判定することになる.

しかし，区間演算が除去されたとはいえ，これでもn変数の連立2次不等式であり，簡単にベクトル$w>0$の存在を判定することは出来ない．この問題点を解決するための方法の一つとして，次のような方法が考えられる．

あるベクトル$u>0$を固定し，$w=\delta u$とおいて不等式が成立するかどうか判定する．これは，区間の大きさのみを可変にし，区間の形を固定することに対応する．方程式のscalingが適切になされていないような場合，このuを各変数のオーダーの比に設定することによって，変数のオーダーのばらつきを吸収できる．特に方程式に関して何の特徴も知られていない場合は，例えば$u=(1,1,...,1)^t$としておけば立方体型の区間で包み込むことになる．また，(5.20)のノルムとして，uをscaling vectorとするscaled maximum normを採れば，(5.19)と共通な量（$|E-L^{-1}f'(c)|u$，$(|L^{-1}A|u)u$）を用いることになり計算量が削減できる．

この方法を採った場合，(5.19)はδに関するn個の2次不等式，(5.20)はδに関するn個の1次不等式となる．これらの2n個の不等式の解に共通部分があれば，その中からδを選択すれば良い．$\delta[-u,\ u]+c$の中に$f(x)=0$の唯一解の存在が保証される．

6. むすび

本稿では，導関数のリプシッツ行列を用いて，事後的な区間の大きさの決定が可能であるという性質を持った区間写像を提案した．また，その区間写像における解の存在判定において，解の存在条件を区間演算を含まない不等式に帰着させることができることを示した．

今後の課題としては，厳密な精度保証を行うことが挙げられる．本稿の手法では，近似解$c \in R^n$の誤差評価を行う際に，$f(c)$と$f'(c)$を用いている．これらの値は，実際の計算機においては正確に計算できないため，本稿の誤差評価は厳密な精度保証とはならない（これはKrawczykの方法でも同様である）．$f(c)$と$f'(c)$をcを含む小さな区間に対する区間演算を用いて計算することにすればこの問題は回避できるが，そのような小さな区間をどのように与えるかは不明である．

謝辞　日頃御指導頂く早大堀内和夫教授，牧野光則助手に深謝する．なお本研究の一部は，文部省科学研究費補助金，早稲田大学特定課題研究の補助を受けた．

文　献

[1] A. Neumaier: “Interval methods for systems of equations”, Cambridge University Press(1990).

[2] M. Makino, S. Oishi, M. Kashiwagi and K. Horiuchi: “An Urabe Type A Posteriori Stopping Criterion and a Globally Convergernt Property of the Simplicial Approximate Homotopy Method”, IEICE Trans., E74, 6, pp. 1440-1446(1991. 6).

[3] S. M. Rump: “Solving Nonlinear Systems with Least Significant Bit Accuracy”, Computing, 29, pp. 183-200 (1982).