数理解析研究所講究録
第 788 巻 1992 年 128-145

合流型超幾何微分方程式の Resurgent 方程式と Stokes 係数

お茶の水女子大学理学部数学科　真島秀行 (Hideyuki Majima)

1. 序

2階合流型超幾何微分方程式の不確定特異点の状況を調べるのに Laplace-Borel-Ecalle の方法を使うと見通しよく Stokes 係数を計算できることを説明したい. 無限遠点での形式解の Borel 変換が Gauss の超幾何関数で表され Ecalle の resurgent 方程式が超幾何関数の接続公式を用いて書き表せる. それを Laplace 変換することにより形式解に漸近展開される解がえられ Stokes 係数が明示的に計算できる. この方法は古典的に知られているともいえるが (cf. [7,8,12]) resurgent 方程式を明示的に用いると非常に見通しよく計算ができることを強調したい. なお, (一般に) 形式解の Borel 変換が限りなくどこまでも解析接続できる, すなわち, resurgent 関数であることをことを初めて主張し, それを詳しく解析するための手段, resurgent calculus を発見したのは Ecalle である. 同様の方法で, 2変数の合流型超幾何微分方程式の Stokes 係数を求めることができる.

2. 超幾何微分方程式について

超幾何級数

$$F(a,b,;c;\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)k!}\xi^{k}$$

は複素平面の原点を中心とする半径 1 の円板で収束し，解析関数を表すが、それは超幾何微分方程式

$$(1-\xi)\xi\frac{d^2}{d\xi^2}F+(c-(a+b+1)\xi)\frac{d}{d\xi}F-abF=0$$

を満たす．もし c が整数でなければ

$$F_0=(F(a,b;c;\xi),\ \xi^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;\xi))$$

および，

$$F_1=(F(a,b;1+a+b-c;1-\xi),(1-\xi)^{c-a-b}F(c-a,c-b;1+c-a-b;1-\xi))$$

がそれぞれ原点と点 1 における超幾何微分方程式の解の基本系を成す．それらの間には次のような線型関係がある，すなわち，可逆行列 P があって F_0 と F_1 は (cf. [7,8,12]):

$$F_0=F_1P,$$

という関係式を満たす，ここで

$$P=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\\ \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}\end{pmatrix},$$

で，その逆行列は次のように与えられる，

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Gamma(1-c)\Gamma(1-c+a+b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} & \dfrac{\Gamma(1-c)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\\ \dfrac{\Gamma(c-1)\Gamma(1-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \dfrac{\Gamma(c-1)\Gamma(1-a-b+c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\end{pmatrix}.$$

3. 2階の一般合流型超幾何微分方程式

3.1. 一般合流型超幾何微分方程式の形式解とその Borel 変換

次の型の微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}w+(A_0+\frac{A_1}{z})\frac{d}{dz}w+(B_0+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2})w=0.$$

を考えよう．これは２階の一般合流型超幾何微分方程式とよばれ，Riemann 球面の原点を確定特異点とし，無限遠点を１級の不確定特異点とする最も一般な微分方程式である．ここで，２次方程式

$$\rho^2+A_0\rho+B_0=0$$

が２つの相異なる解をもつとし，それらを ρ_1 と ρ_2 で表すと

$$\rho_1+\rho_2=-A_0,\ \rho_1\rho_2=B_0$$

が成り立つ．このとき上の微分方程式は，

$$\exp(\rho z)\phi(\rho;z),\phi(\rho;z)=z^{-\kappa}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho)z^{-k},$$

という形の形式解をもつ．ここで，$\rho=\rho_j\,(j=1,2)$ に対して

$$\kappa=\frac{A_1\rho+B_1}{2\rho+A_0},$$

$$c_{k+1}(\rho)=\frac{(\kappa+k)(\kappa+k+1)-A_1(\kappa+k)+B_2}{(2\rho+A_0)(\kappa+k+1)-(A_1\rho+B_1)}c_k(\rho)\,.$$

さらに，次の方程式

$$t^2-(3-A_1)t+(2-A_1+B_2)=0\,,$$

の解を，α と β で表し，$\gamma=2-\kappa$ とおけば，

$$c_{k+1}(\rho)=\frac{(\alpha-\gamma+k+1)(\beta-\gamma+k+1)}{(2\rho+A_0)(k+1)}c_k(\rho)\,(k=0,1,2,\ldots)\,,$$

すなわち，

$$c_k(\rho)=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+k+1)\Gamma(\beta-\gamma+k+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)(2\rho+A_0)^k k!}c_0(\rho)\,(k=0,1,2,\ldots)\,,$$

であることがわかる．従って，κ が整数でなければ $\phi(\rho;z)$ の Borel 変換

$$\Phi(\rho;\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(\rho)}{\Gamma(k+\kappa)}\zeta^{k+\kappa-1},$$

は

$$\frac{(2\rho+A_0)^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa)}c_0(\rho)(\frac{\zeta}{(2\rho+A_0)})^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;\frac{\zeta}{2\rho+A_0})\,,$$

に等しく，これはパラメタが $(\alpha,\beta;\gamma)$ で変数が $\xi=\dfrac{\zeta}{2\rho+A_0}$ の超幾何微分方程式の原点の近傍の解に他ならない．

3.2. 2階の一般合流型超幾何微分方程式に対する Resurgent 方程式

さて，ここで

$$\rho_1-\rho_2=2\rho_1+A_0,\quad \rho_2-\rho_1=2\rho_2+A_0,$$

$$1-\frac{\zeta}{\rho_1-\rho_2}=\frac{\zeta-(\rho_1-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1},$$

$$1-\frac{\zeta}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\zeta-(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1-\rho_2},$$

$$\gamma_1-\alpha-\beta=1-\gamma_2,\gamma_1-\alpha=\beta-\gamma_2+1\,,\gamma_1-\beta=\alpha-\gamma_2+1\,,$$

であることに注意し接続公式を使うと

$$(\frac{(2\rho_1+A_0)^{\kappa_1-1}}{\Gamma(\kappa_1)}c_0(\rho_1))^{-1}\Phi(\rho_1;\zeta)$$

$$=a_{11}F(\alpha_1,\beta_1;1+\alpha_1+\beta_1-\gamma_1;1-\frac{\zeta}{\rho_1-\rho_2})$$

$$+a_{12}(1-\frac{\zeta}{\rho_1-\rho_2})^{\gamma_1-\alpha_1-\beta_1}F(\gamma_1-\alpha_1,\gamma_1-\beta_1;1+\gamma_1-\alpha_1-\beta_1;1-\frac{\zeta}{\rho_1-\rho_2}),$$

すなわち，

$$(\frac{(2\rho_1+A_0)^{\kappa_1-1}}{\Gamma(\kappa_1)}c_0(\rho_1))^{-1}\mathbf{\Phi}(\rho_1;\zeta)$$

$$=a_{11}F(\alpha_2,\beta_2;\gamma_2;1+\frac{\zeta}{\rho_2-\rho_1})$$

$$+a_{12}(\frac{(\rho_2-\rho_1)^{\kappa_2-1}}{\Gamma(\kappa_2)}c_0(\rho_2))^{-1}\mathbf{\Phi}(\rho_2;\zeta-(\rho_1-\rho_2))\,,$$

がわかる．ここで，

$$\alpha_1=\alpha,\beta_1=\beta,\alpha_2=\beta,\beta_2=\alpha,$$

$$a_{11}=\frac{\Gamma(2-\gamma_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)},$$

$$a_{12}=\frac{\Gamma(2-\gamma_1)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma_1)}{\Gamma(\alpha-\gamma_1+1)\Gamma(\beta-\gamma_1+1)},$$

とおいた．よって，次の関係式 (R-1):

$$\mathbf{\Phi}(\rho_1;\zeta\exp(2i\pi))-\mathbf{\Phi}(\rho_1;\zeta)$$

$$=(\exp(2i\pi\kappa_1)-1)\mathbf{\Phi}(\rho_1;\zeta)$$

$$=(\exp(2i\pi\kappa_1)-1)ca_{12}\mathbf{\Phi}(\rho_2;\zeta-(\rho_1-\rho_2))$$

$$+(\exp(2i\pi\kappa_1)-1)\frac{(\rho_1-\rho_2)^{\kappa_1-1}}{\Gamma(\kappa_1)}c_0(\rho_1)a_{11}F(\alpha_2,\beta_2;\gamma_2;1+\frac{\zeta}{\rho_2-\rho_1})\,,$$

を得る．ここで

$$c=\frac{(\rho_1-\rho_2)^{\kappa_1-1}\Gamma(\kappa_2)c_0(\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)^{\kappa_2-1}\Gamma(\kappa_1)c_0(\rho_2)},$$

とおいた．同様にして，関係式 (R-2):

$$\mathbf{\Phi}(\rho_2;\zeta\exp(2i\pi))-\mathbf{\Phi}(\rho_2;\zeta)$$

$$= (\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)\mathbf{\Phi}(\rho_2; \zeta)$$

$$= (\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)c^{-1}a_{21}\mathbf{\Phi}(\rho_1; \zeta - (\rho_2 - \rho_1))$$

$$+(\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)\frac{(\rho_2 - \rho_1)^{\kappa_2 - 1}}{\Gamma(\kappa_2)}c_0(\rho_2)a'_{11}F(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; 1 + \frac{\zeta}{\rho_1 - \rho_2}),$$

を得る．ここで,

$$a_{11}' = \frac{\Gamma(2-\gamma_2)\Gamma(\gamma_2 - \alpha - \beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)},$$

$$a_{21} = \frac{\Gamma(2-\gamma_2)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma_2)}{\Gamma(\alpha - \gamma_2 + 1)\Gamma(\beta - \gamma_2 + 1)},$$

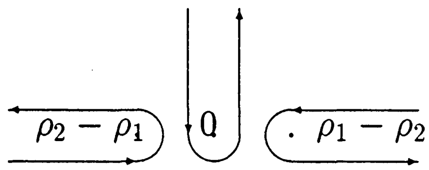
とおいた．これらの関係式は 2 階の一般合流型超幾何微分方程式に対する Ecalle[6] の Resurgent 方程式に他ならない．

さて，$\mathbf{\Phi}(\rho_j; \zeta)$ の一般 Laplace 変換

$$\mathcal{L}(C; \mathbf{\Phi}(\rho_j; \zeta); z) = \int_C \exp(-z\zeta)\mathbf{\Phi}(\rho_j; \zeta)d\zeta,\ (j = 1, 2)\,,$$

を考える．ここで C は次の積分路のうちの 1 つとする；

- $C(\rho_1 - \rho_2; \theta)$：無限遠点から $\arg(\zeta - (\rho_1 - \rho_2))$ が θ の方向から点 $\rho_1 - \rho_2$ に近づき一周して $\theta + 2\pi$ の方向で無限遠点へ遠ざかる積分路,
- $C(0; \theta)$：無限遠点から $\arg(\zeta)$ が θ の方向から原点に近づき一周して $\theta + 2\pi$ の方向で無限遠点へ遠ざかる積分路,
- $C(\rho_2 - \rho_1; \theta)$：無限遠点から $\arg(\zeta - (\rho_2 - \rho_1))$ が θ の方向から点 $\rho_2 - \rho_1$ に近づき一周して $\theta + 2\pi$ の方向で無限遠点へ遠ざかる積分路.



このとき $j=1$ に対しては

$$\arg(\rho_1-\rho_2)-2\pi<\theta<\arg(\rho_1-\rho_2)\,,$$

であれば，ζ が無限遠点に近づくとき $\exp(-z\zeta)$ が 0 に近づくので，

$$(\exp(2i\pi\kappa_1)-1)^{-1}\exp(\rho_1 z)\mathcal{L}(C(0;\theta);\mathbf{\Phi}(\rho_1;\zeta);z)$$

は角領域

$$\frac{\pi}{2}<\arg(-\zeta z)<\frac{3\pi}{2},$$

すなわち，

$$-\frac{\pi}{2}-\theta<\arg z<\frac{\pi}{2}-\theta,$$

で解析的で，形式解 $\exp(\rho_1 z)\phi(\rho_1;z)$ に漸近展開される解となる．その解析接続を考えることにより，角領域

$$-\frac{\pi}{2}-\arg(\rho_1-\rho_2)<\arg z<\frac{5\pi}{2}-\arg(\rho_1-\rho_2)\,,$$

で解析的で，形式解 $\exp(\rho_1 z)\phi(\rho_1;z)$ に漸近展開される解

$$(\exp(2i\pi\kappa_1)-1)^{-1}\exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1;z)$$

を得る．同様に $j=2$ に対して，

$$\arg(\rho_2-\rho_1)-2\pi=\arg(\rho_1-\rho_2)-\pi<\theta<\arg(\rho_1-\rho_2)+\pi=\arg(\rho_2-\rho_1)\,,$$

であれば，ζ が無限遠点に近づくとき $\exp(-z\zeta)$ が 0 に近づくので，

$$(\exp(2i\pi\kappa_2)-1)^{-1}\exp(\rho_2 z)\mathcal{L}(C(0;\theta);\mathbf{\Phi}(\rho_2;\zeta);z)$$

は

$$\frac{\pi}{2} < \arg(-\zeta z) < \frac{3\pi}{2},$$

すなわち,

$$-\frac{\pi}{2} - \theta < \arg z < \frac{\pi}{2} - \theta,$$

で解析的で，形式解 $\exp(\rho_2 z)\phi(\rho_2; z)$ に漸近展開される解となる．その解析接続を考えることにより，角領域

$$-\frac{\pi}{2} - \arg(\rho_2 - \rho_1) =$$

$$-\frac{3\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2)$$

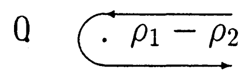
$$= \frac{5\pi}{2} - \arg(\rho_2 - \rho_1)\,,$$

で解析的で，形式解 $\exp(\rho_2 z)\phi(\rho_2; z)$ に漸近展開される解

$$(\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)^{-1}\exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z)$$

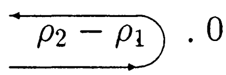
を得る．このとき，関係式 (R-1) と (R-2) で それぞれ，次の図

$C(\rho_1 - \rho_2; \arg(\rho_1 - \rho_2))$:

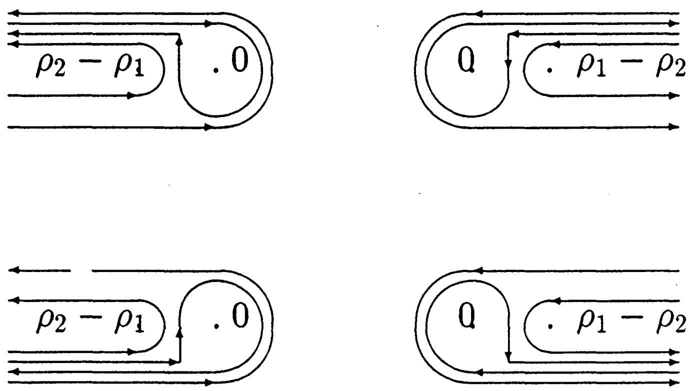


と

$C((\rho_1 - \rho_2)\exp(i\pi); \arg(\rho_1 - \rho_2) + \pi)$:



の積分路による Laplace 変換 をとり，積分路を次の図



のように変形させることにより，関係式 (S-1)

$$-\exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z\exp(2i\pi))\exp(-2i\pi\gamma_1) + \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z)$$

$$= c(\exp(2i\pi\kappa_1) - 1)a_{12}\exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z)\ ,$$

が角領域

$$-\frac{\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < \frac{\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2)\ ,$$

で成り立ち，関係式 (S-2)

$$-\exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z\exp(2i\pi))\exp(-2i\pi\gamma_2) + \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z)$$

$$= c^{-1}(\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)a_{21}\exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z\exp(2i\pi))\ ,$$

が角領域

$$-\frac{3\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < -\frac{\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2)\ ,$$

でそれぞれ成立する．

3.3. 2階の一般合流型超幾何微分方程式の不変量

以下では，定数 (A_0, A_1, B_0, B_1)，すなわち，$(\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \kappa_2)$ を一組固定し B_2 をパラメタと考える． 2階の一般合流型超幾何微分方程式は1階の線型系

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} w \\ \dfrac{d}{dz}w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(B_0 + \dfrac{B_1}{z} + \dfrac{B_2}{z^2}) & -(A_0 + \dfrac{A_1}{z}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ \dfrac{d}{dz}w \end{pmatrix},$$

のように書きなおせる．形式解があるということは，無限遠点における形式変換

$$\begin{pmatrix} w \\ \dfrac{d}{dz}w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \phi(\rho_1; z)z^{\kappa_1} & \phi(\rho_2; z)z^{\kappa_2} \\ \dfrac{d}{dz}(\phi(\rho_1; z)e^{\rho_1 z})z^{\kappa_1}e^{-\rho_1 z} & \dfrac{d}{dz}(\phi(\rho_2; z)e^{\rho_2 z})z^{\kappa_2}e^{-\rho_2 z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

により，上の線型系が

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 - \dfrac{\kappa_1}{z} & 0 \\ 0 & \rho_2 - \dfrac{\kappa_2}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

に変換されることを意味する．この系を $E(\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \kappa_2)$ で表し標準形ということにする．さて，無限遠点で有理型の関数行列 $A = (a_{ij}(z))_{i,j=1,2}$ を係数とする線型常微分方程式系

$$E_A: \quad \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

を考える．上のような線型常微分方程式系で形式変換により標準形

$$E(\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \kappa_2)$$

に形式変換で変換されるようなものの全体の集合を

$$\mathcal{E}(\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \kappa_2)$$

で表そう．2つの線型常微分方程式系 E_A と E_B が解析的に同値であるとは，E_A が無限遠点で解析的な変換で E_B に変換されることであると定義する．このとき，$E_A \sim E_B$，と書くことにする．Sibuya[11]，Malgrange[10] と Babbitt-Varadarajan[1] による線型常微分方程式系の不確定特異点における分類理論によれば

$$\mathcal{E}(\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \kappa_2)/\sim \;\simeq\; H^1(S^1, \Lambda)/\sim_H ,$$

という集合の同型対応がある．ここで，Λ は 無限遠点に向かう方向の集合 S^1 の上の，微分方程式

$$\frac{d}{dz}P = \begin{pmatrix} \rho_1 - \dfrac{\kappa_1}{z} & 0 \\ 0 & \rho_2 - \dfrac{\kappa_2}{z} \end{pmatrix} P - P \begin{pmatrix} \rho_1 - \dfrac{\kappa_1}{z} & 0 \\ 0 & \rho_2 - \dfrac{\kappa_2}{z} \end{pmatrix},$$

の解で単位行列に漸近展開される行列値関数 P の芽の層で，2つのコホモロジークラス (P_{ij}) と (Q_{ij}) が同値であるとは，定数行列

$$G = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

で

$$G(P_{ij})G^{-1} = (Q_{ij}) ,$$

となるものが存在することと定め，

$$(P_{ij}) \sim_H (Q_{ij}) ,$$

と表すことにした．S^1 の開被覆 $\{U_1, U_2\}$ を

$$U_1 = \{\exp(i(\arg z)) : -\frac{\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2)\}\,,$$

$$U_2 = \{\exp(i(\arg z)) : \frac{\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < \frac{5\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2)\}\,,$$

ととると，$H^1(S^1, \Lambda)$ は

$$\{\begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & 1 \end{pmatrix}\}$$

と同型だから，

$$H^1(S^1, \Lambda)/\sim_H$$

は

$$\{c_{12}c_{21}\}\,,$$

と同一視される．一般合流型超幾何微分方程式の形式解

$$(\exp(\rho_1)\phi(\rho_1; z), \exp(\rho_2)\phi(\rho_2; z))\,,$$

に漸近展開される解の基本系として，U_1 上で

$$(e_1 \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z), e_2 \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z))\,,$$

をとり，U_2 で

$$(e_1 \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z), e_2 \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z\exp(-2i\pi))\exp(2i\pi\gamma_2)),$$

をとることにしよう．ここで，

$$e_1 = (\exp(2i\pi\kappa_1) - 1)^{-1}, \quad e_2 = (\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)^{-1},$$

とおいた．このとき，z が

$$\frac{\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) ,$$

であるとき，関係式 (S-2) により

$$(e_1 \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z), e_2 \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z\exp(-2i\pi)) \exp(2i\pi\gamma_2))$$
$$= (e_1 \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z), e_2 \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z)) \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

が成り立つ．また，関係式 (S-1) より，z が

$$\frac{3\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) < \arg z < \frac{5\pi}{2} - \arg(\rho_1 - \rho_2) ,$$

であるとき

$$(e_1 \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z\exp(-2i\pi)), e_2 \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z\exp(-2i\pi)))$$
$$= (e_1 \exp(\rho_1 z)\widetilde{\Phi}(\rho_1; z), e_2 \exp(\rho_2 z)\widetilde{\Phi}(\rho_2; z\exp(-2i\pi)) \exp(2i\pi\gamma_2))$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-2i\pi\gamma_1) & 0 \\ 0 & \exp(-2i\pi\gamma_2) \end{pmatrix}$$

が成立することがわかる．ここで，

$$c_{12} = c^{-1}{e_1}^{-1}e_2(\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)a_{21}\exp(2i\pi\gamma_2),$$

$$c_{21} = ce_1{e_2}^{-1}(\exp(2i\pi\kappa_1) - 1)a_{12}\exp(2i\pi(\gamma_1 - \gamma_2))$$

（[4] も参照のこと.）従って，分類の不変量が

$$c_{12}c_{21} = a_{12}a_{21}(\exp(2i\pi\kappa_2) - 1)(\exp(2i\pi\kappa_1) - 1)\exp(2i\pi\gamma_1).$$

と計算される．Γ 関数の公式と ρ_j, κ_j $(j=1,2)$,， の定義式から，

$$c_{12}c_{21} = -2\exp(i\pi(\kappa_2-\kappa_1))(\cos(\kappa_1-\kappa_2)\pi + \cos(\beta-\alpha)\pi)\,,$$

であることがわかる．

$$(\beta-\alpha)^2 = (A_1-1)^2 - 4B_2,$$

であるからパラメタが B_2 と B_2' の 2 つの一般合流型超幾何微分方程式が解析的に同値であるのは

$$((A_1-1)^2-4B_2)^{\frac{1}{2}} = \pm((A_1-1)^2-4B_2')^{\frac{1}{2}} + 2n\,,$$

すなわち，

$$(B_2'-B_2+n^2)^2 = n^2((A_1-1)^2-4B_2)\,,$$

が或る整数 n に対して成立するとき，しかも，そのときのみであることがわかる．

4. 特殊な場合：Bessel, Kummer, Whittaker, Weber と Airy.

4.1. Bessel 方程式

$$A_0=0,\ A_1=1,\ B_0=1,\ B_1=0,\ B_2=-\nu^2$$

$$\rho_1=i,\ \kappa_1=\frac{1}{2},\ \gamma_1=\frac{3}{2},$$

$$\rho_2=-i,\ \kappa_2=\frac{1}{2},\ \gamma_2=\frac{3}{2},$$

$$\alpha=1-\nu,\ \beta=1+\nu,$$

$$a_{12}=a_{21}=-\cos(\pi\nu),$$

$$c_{12}c_{21} = -4\cos^2(\pi\nu).$$

$B_2 = -\nu^2$ だから，パラメタが ν と ν' の2つの Bessel 方程式が解析的に同値であるのは，$\nu' = \pm\nu + n$ が或る整数 n に対して成り立つとき，そして，そのときに限る.（[2] も参照のこと.）

4.2. Kummer 方程式

$$A_0 = -1,\ A_1 = c,\ B_0 = 0,\ B_1 = -a,\ B_2 = 0,$$

$$\rho_1 = 0,\ \kappa_1 = a,\ \gamma_1 = 2 - a,$$

$$\rho_2 = 1,\ \kappa_2 = c - a,\ \gamma_2 = 2 - c + a,$$

$$\alpha = 2 - c,\ \beta = 1,$$

$$a_{12} = a_{21} = 1,$$

$$c_{12}c_{21} = -2\exp(i\pi(c - 2a))(\cos((2a - c)\pi) - \cos(c\pi)).$$

4.3. Whittaker 方程式

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ B_0 = -\frac{1}{4},\ B_1 = k,\ B_2 = \frac{1}{4} - m^2,$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2},\ \kappa_1 = k,\ \gamma_1 = 2 - k,,$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{2},\ \kappa_2 = -k,\ \gamma_2 = 2 + k,,$$

$$\alpha = \frac{3}{2} + m,\ \beta = \frac{3}{2} - m,$$

$$a_{12} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+k)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m + k)\Gamma(\frac{1}{2} - m + k)},\quad a_{21} = \frac{\Gamma(-k)\Gamma(1-k)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)\Gamma(\frac{1}{2} - m - k)}$$

$$c_{12}c_{21} = -2(\cos 2k\pi + \cos 2m\pi)\exp(-2ki\pi).$$

4.4. Weber 方程式

Weber 方程式とは Kummer 方程式でパラメタを $(a,c) = (-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$ としたものに変数変換,

$$v(z) = \exp(-\frac{z^2}{2})w(z^2)\ ,$$

をしてえられる方程式

$$\frac{d^2v}{dz^2} + (2\nu + 1 - z^2)v = 0,$$

のことで,

$$\rho_1 = \frac{1}{2},\ \kappa_1 = -\frac{\nu}{2},,\ \gamma_1 = 2 + \frac{\nu}{2},$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{2},\ \kappa_2 = \frac{1+\nu}{2},,\ \gamma_2 = 2 - \frac{1+\nu}{2},$$

$$\alpha = \frac{3}{2},\ \beta = 1,$$

$$a_{12} = a_{21} = 1$$

$$c_{12}c_{21} = \exp(2i\pi\nu) - 1.$$

4.5. Airy 方程式

Airy 方程式とは

$$\frac{d^2v}{dz^2} - zv = 0,$$

のことで，Bessel 方程式においてパラメタを $\nu = \frac{1}{3}$ とし，変数変換

$$v(z) = (z^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}w(\frac{2}{3}iz^{\frac{3}{2}})\ ,$$

をしたものになっている.

$$\rho_1 = i,\ \kappa_1 = \frac{1}{6},\ \gamma_1 = \frac{11}{6},$$

$$\rho_2 = -i,\ \kappa_2 = \frac{1}{6},\ \gamma_2 = \frac{11}{6},$$

$$\alpha = \frac{5}{3},\ \beta = 1,$$

$$a_{12} = a_{21} = 1,$$

$$c_{12}c_{21} = -1.$$

参考文献

[1] Babbitt, D.-G. and Varadarajan, V.S.: Local Moduli for Meromorphic Differential Equations, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), Vol.12, No.1 (1985), p.95-p.98.

[2] Babbitt, D.-G. and Varadarajan, V.S.: Local Moduli for Meromorphic Differential Equations, vol. 169-170, S.M.F. (1989).

[3] Balser, W., Jurkat, W.-B., and Lutz, D.A.: On the Reduction of Connection Problems for Differential Equations with an Irregular Singular Point to Ones with only Regular Singularities,I, SIAM J. Math. Anal. Vol. 12, No. 5 (1981), p.691-p.721.

[4] Balser, W., Jurkat, W.-B. and Lutz, D.A.: Birkhoff Invariants and Stokes' Multipliers for Meromorphic Linear Differential Equations, J. Math. Anal. App. Vol 71, no.1 (1979), p.48-p.94.

[5] Birkhoff, G.-D.: On a Simple Type of Irregular Singular Point, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.14 (1913), p.462-p.476.

[6] Ecalle, J.: Les Fonctions Résurgents, Tome III; L'équation du Pont et la Classification Analytique des Objets Locaux, Publications Mathématiques d'Orsay, 85-05.

[7] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. G.: Higher Transendental Functions, I-III, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill (1953).

[8] Inui, T.: Special Functions(特殊関数), 岩波書店 (1962).

[9] Majima, H: Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points, Lect. Note in Math. no. 1075, Springer-Verlag(1984).

[10] Malgrange, B.: Remarques sur les Equations Différentielles à Points Singuliers Irreguliers, in Equations Différentielles et Systèmes de Pfaff dans le Champ Complexe edited by R. Gérard and J.-P. Ramis, Lecture Notes in Math., No.712, Springer-Verlag, p.77-p.86.

[11] Sibuya, Y.: Stokes Phenomena, Bull. Amer. Math. Soc, Vol.83(1977), p.1075-p.1077.

[12] Whittaker, E. T., and Watson, G. N.: A Course of Modern Analysis, Cambridge, 1902.