数理解析研究所講究録
第788巻1992年193-207

変わり点問題と”共鳴”現象

大分大 工　大河内茂美(Shigemi Ohkohchi)

1 特異摂動境界値問題

O'Malley の解説にある turning point を含む次のような特異摂動境界値問題を考えることにする。

(1)　$$\varepsilon y'' + 2\alpha x y' - \alpha\beta y = 0 \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

$y(-1)$, $y(1)$ は与えれている。

ここで、α, β は定数であって、α はゼロではないものとし、εは十分小さな正のパラメーターとする。

このとき、一階の導関数 y' の係数である $2\alpha x$ は区間 $[-1, 1]$ で零点を持つことになり、その点を特異摂動境界値問題における turning point と呼ばれるのであるが、微分方程式(1)おいて、$\varepsilon=0$ として得られる一階の微分方程式(reduced equation)

$$2\alpha x y' - \alpha\beta y = 0$$

の特異点となっている点である。

turning point を含む特異摂動境界値問題に話を進める前に、turning point を含まない特異摂動境界値問題について説明しておくことにする。

一般に、次のような2階の線形微分方程式に対する境界値問題を考えることにする。

（a）　$\varepsilon y'' + f(x, \varepsilon) y' + g(x, \varepsilon) y = 0$

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

$$y(-1) = A, \; y(1) = B$$

ここで、ε は十分小なパラメーターで、$f(x, \varepsilon)$ は考えている区間ではゼロにはならないものとしておく。$\varepsilon y''$ は区間［-1，1］では十分に小さいものと考えることができるから、この境界値問題の解は reduced equation である

（b）　$f(x, 0) y' + g(x, 0) y = 0$

の微分方程式の解にある程度近いものであると考えることができる。ところが、この微分方程式は一階の方程式であるから、境界条件が特別な場合を除けば、２つの境界条件を満足することは不可能である。これは境界層(boundary layer)という形で区間のいずれかの端点において、処理されることになる。その点の近くでは、$g(x, 0) y$ はほとんど無視でき、解は本質的に

（c）　$\varepsilon y'' + f(x, \varepsilon) y' = 0$

を満足することになる。境界層の起こる点では、$f(x, \varepsilon)$ はほとんど定数であると考えられるから、この微分方程式の定数でない解は、f の符合の正負に応じて、指数的に増大または減衰することになる。

ここで、$f > 0$ の場合を考えれば、指数的挙動を示す解は $\varepsilon \to 0$ で減衰解であるから、境界層は区間の左側で起こることになる。$f < 0$ であれば、境界層は区間の右側で現れることになる。従って、$f > 0$ とした場合には、

境界値問題の解に対する区間［-1，1］での一様妥当な近似解を求め

るためには、微分方程式（b）を境界条件の1つである $y(1)=B$ のもとで解いた解と、微分方程式（c）を境界条件 $y(-1)=A$ のもとで解いた解とを共通領域において "matching" することによって得られることになる。

以下では、$f(x, \varepsilon)$ に対して符合の変化を許した場合に、どれほど興味ある現象をもたらすかを考えることにする。

定数 $\alpha>0$ とすると、区間の両端である $x=-1$ の近くでは、y' の係数 $2\alpha x$ は負であり、$x=1$ の近くでは正である。その結果、turning point を含まない場合に特異摂動境界値問題での境界層の出現に関する上に述べた事実から、両端点では、極限解への収束に関する一様性は壊れないであろうと考えられる。　従って、この場合に、極限解 $z(x)$ としては

$$2xz'-\beta z=0, \quad z(-1)=y(-1) \qquad [-1, 0)$$

および

$$2xz'-\beta z=0, \quad z(1)=y(1) \qquad (0, 1]$$

を満足することになり、turning point である $x=0$ の点においては、微分方程式の特異点であるために、一般には非有界な挙動をとるものと考えられる。

一方、定数 $\alpha<0$ の場合には、y' の係数 $2\alpha x$ は $x=-1$ の近くでは正であり、$x=1$ の近くでは負になる。この事から、$x=-1$, 1 の両端点で、極限解への収束に関する一様性は壊れるであろうと予想される。区間の内部である $(-1, 1)$ で極限解を考えた場合には、それは、reduced equation の自明解である $y=0$ と推測されるが、β

の特別な値に対しては、この推測が否定されることになる。このβの特別な場合には、自明でない極限解に一様収束する解が存在することになり、これを特異摂動における "resonance" 現象という名前で呼ばれている。

2 簡単な例

ここで、"共鳴" 現象を調べるために、特に $\alpha=-1$ として考えることにする。微分方程式（1）に対して、従属変数の変換 $u=exp[-x^2/2\varepsilon]$ を行なうことによって、（1）は

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = \{x^2-\varepsilon(1+\beta)\}u$$

の形の方程式に変換されるが、さらに stretching と呼ばれる独立変数の変換を利用すれば

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \{s^2-\varepsilon^2(1+\beta)\}u$$

に変換される。ただし、$x=\varepsilon^{1/2}s$ とする。

ところで、Weber関数、あるいは parabolic cylinder 関数と呼ばれる関数は、よく知られているように次のような形の

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t^2\}w=0$$

微分方程式の解である。この方程式の２つの独立解を $w_n(t)$，$w_{n-1}(it)$ と表わすことができて、方程式（１）の一般解は

$$y(x)=exp[x^2/2\varepsilon][C_1 w_{-1-\beta/2}((-2/\varepsilon)^{1/2}x)$$
$$+C_2 w_{\beta/2}(i(-2/\varepsilon)^{1/2}x)]$$

で表わされる。また、C_1，C_2 は与えられた境界条件 $y(1)$，$y(-1)$ からつぎの２式を連立方程式として解いて定められるものである。

$$y(1)=exp[1/2\varepsilon][C_1 w_{-1-\beta/2}((-2/\varepsilon)^{1/2})$$
$$+C_2 w_{\beta/2}(i(-2/\varepsilon)^{1/2})]$$

（２）

$$y(-1)=exp[1/2\varepsilon][C_1 w_{-1-\beta/2}(-(-2/\varepsilon)^{1/2})$$
$$+C_2 w_{\beta/2}(-i(-2/\varepsilon)^{1/2})]$$

ここで、ε が十分小な場合を調べるためには、一般解の形から Weber 関数の独立変数が十分大きい場合の挙動に関して知っておく必要がある。この漸近的挙動に関しては

（３）　$w(z)\sim exp[-z^2/4]z^n\{1+o(1)\}$

$$z\to+\infty$$

（４）　$w(z)\sim exp[-z^2/4]z^n\{1+o(1)\}$

$$-\{(2\pi)^{1/2}/\Gamma(-n)\}\exp[n\pi i]$$
$$exp[z^2/4]z^{-n-1}\{1+o(1)\}$$
$$z\to-\infty \quad n\neq 0, 1, 2, ...$$

（４'）　$w(z)\sim exp[-z^2/4]He_n(z)$

$$=exp[-z^2/4]z^n\{1+o(1)\}$$
$$z\to-\infty \quad n=0, 1, 2, ...$$

であることはよく知られている。ただし、$He_n(z)$ とあるのは n 次のエルミート多項式である。

ここで、n が非負整数であるか否かによって、負の実軸での Weber関数の漸近的挙動に関して、指数的に減衰するか指数的に増大するかの極端な違いが現れることに注意しておく必要がある。この漸近的性質の違いに起因して、resonance 現象が引き起こされるものと考えることができる。実際、$\varepsilon \to 0$ での解の様子と極限解について、つぎのような場合分けで調べることができる。

case(1) $\beta \neq 2m,\ m = 0, 1, 2, ...$

このとき、(2), (3), (4) から

$$C_1 = \frac{exp[-1/2\varepsilon]}{w_{-1-\beta/2}(i(2/\varepsilon)^{1/2})}\{-(-1)^{\beta/2}y(-1) + o(1)\}$$

$$C_2 = \frac{exp[-1/2\varepsilon]}{w_{\beta/2}(-(2/\varepsilon)^{1/2})}\{y(1) + (-1)^{\beta/2}y(-1) + o(1)\}$$

この結果、解の振る舞いは

$$y(x) = \{y(1) + o(1)\}x^{1+\beta/2} exp[-(1-x^2)/\varepsilon] \qquad x>0$$

$$y(x) = \{y(-1) + o(1)\}(-x)^{1+\beta/2} exp[-(1-x^2)/\varepsilon] + o(e^{-(1-\delta)/\varepsilon}) \qquad x<0$$

$$y(0)=o\left(e^{-(1-\delta)/\varepsilon}\right)$$

となる。ただし、$\delta>0$　従って、１，－１ を除いた（－１，１）の開区間で考えれば、$\varepsilon\to 0$ に対して $y\to 0$ であって、極限解への収束の一様性は、$y(1)$，$y(-1)$ が特別な条件で与えられない限り、両端点で壊れることになり、境界層が現れることとなる。

case(1)　$\beta=2m$, $m=0, 1, 2, ...$

このとき、（２），（３），（４'） から

$$y(x)=exp[x^2/2\varepsilon][C_1 w_{-1-m}(i(2/\varepsilon)^{1/2}x) + C_2 He_m(-(2/\varepsilon)^{1/2}x)]$$

$$C_1=\frac{exp[-1/2\varepsilon]}{w_{-1-m}(i(2/\varepsilon)^{1/2})}[\{y(1)-(-1)^m y(-1)\}/2+o(1)]$$

$$C_2=\frac{exp[-1/2\varepsilon]}{He_m(-(2/\varepsilon)^{1/2})}[\{y(1)+(-1)^m y(-1)\}/2+o(1)]$$

となり、$y(x)$ の振る舞いは

$$y(x)=\frac{1}{2}\left\{\{y(1)-(-1)^m y(-1)\}x^{1+m} \phantom{\frac{}{}}\right.$$
$$\left.\quad exp[-(1-x^2)/\varepsilon]\{y(1)+(-1)^m y(-1)\}x^m\right\}+o(1)$$

$$x \neq 0$$

$$y(0) = o(e^{-(1-\delta)/\varepsilon}) \qquad \delta > 0$$

で与えられる。従って、1，−1 を除いた（−1，1）の区間で考えれば、εをゼロくするとき

$$y(x) \rightarrow \{y(1) + (-1)^m y(-1)\} x^m\} / 2$$

であり、両端点での収束の一様性は壊れるかも知れないが、境界条件が

$$y(1) + (-1)^m y(-1) = 0$$

でない限り、この極限解は reduced equation の解であり自明な解ではない。

3 resonance の定義と条件

特異摂動境界値問題では turning point を含む場合には、たいていの微分方程式に対しては二つの境界層を持ち、εをゼロとするとき、その内部では解はゼロに収束する。しかしながら、特別な微分方程式に対しては解はεをゼロとするとき、ゼロにはならない。このような場合に Ackerberg と O'mally にしたがって、"resonance"が起こったということにする。興味ある点は、このような resonance 現象が起こる場合には、特異摂動境界値問題での標準的な手法である接合漸近展開(matched asymptotic expansions)では、εをゼロとするときの極限での挙動を特定できないということにある。このことから、まずはじめに関心のあるのは、境界条件も含めて、与えられた微分方程式がどのような条件のもとで、resonance 現象を引き起こすかということであり、さらに、resonance 現象が起こったとして、その場合の極限解を計算することができるかと

いうことになる。

正確を期するために、resonance の定義をつぎのように定めることにする。

定義　微分方程式

(a)　$\varepsilon y'' + f(x, \varepsilon) y' + g(x, \varepsilon) y = 0$

が resonance を引き起こすとは、解 $y(x, \varepsilon)$ が存在し、考えている区間で一様に reduced equation の非自明解に収束することとする。

一般に resonance に関しては、境界値問題との関連で話題になることが多いのであるが、ここでの定義としては、N.Kopell の考えに従って、微分方程式のみに関係する現象であり、境界条件とは切り離して考えることにする。

resonance が起きるための必要条件として、早くから指摘されていたのは

$$-g(0, 0) / f_x(0, 0) = N$$

Nは非負整数とする、というものである。より興味があり必要度の高い、それでは与えられた微分方程式はどのような条件のもとで resonance が起きるのか？という十分条件に関しては、いささか時の経過を必要としたのであるが、Matkowsky は次の条件が resonance の十分条件ではなかろうかとの提案を行なった。

Matkowsky条件　微分方程式（a）は自明でないεの形式的べき級数解

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) \varepsilon^m$$

（係数　$a_m(x)$ は有界）　をもつ。

ここでは、内部領域に一般な位数の変わり点を持つ特異摂動問題を複素領域での変わり点問題として考え、

仮定　微分方程式（a）の係数 $f(x, \varepsilon)$, $g(x, \varepsilon)$ は $x \in D$, $\varepsilon \ll 1$ で正則である（ただし、Dは考えている区間を内部に含む単連結領域とする）

という条件のもとで、具体例として示した特別な方程式とは限らない一般の微分方程式の場合の resonance 現象の出現と Matkowsky 条件との関連について考え、

”微分方程式（a）が Matkowsky条件を満たす

⇒（a）は resonance をもつ”

ということを示すのが今回の目的である。

仮定でのεに関する正則性は実領域の問題として考えた場合には強すぎると思われるかも知れないが、次の例からその必要性がわかる。

（例）　$\varepsilon y'' - 2xy' + (2 + 2\exp[-1/\varepsilon])y = 0$

この方程式は Matokowsky条件を満たし、$y(x) = x$ が外部解であるが、resonanceではないことは簡単な計算でわかる。

4　十分性のための手続き

微分方程式（a）が Matkowsky条件と上に述べた仮定を満たすものとして議論を展開することにする。係数$f(x, 0)$はm位の零点を持つとしておく。独立変数の変換

$$\left[-\frac{m+1}{2} \int_0^x f(t, 0)\, dt \right]^{1/(m+1)}$$

を予め施しておくことにすると

$$f(x, \varepsilon) = -2x^m + \varepsilon k(x, \varepsilon)$$

$k(\ )$ は正則。このあと、従属変数の変換

$$w \cdot exp \left[-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x f(t, \varepsilon)\, dt \right]$$

を実施することにすると

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = [x^{2m} + \varepsilon R(x, \varepsilon)]\, w$$

となる。さらに、$T(x, \varepsilon)$ を ε べきの形式的べき級数とする従属変数の変換によって、この方程式は

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = [x^{2m} + \varepsilon \sum_{r=0}^{2m-2} a_r(\varepsilon)\, x^r]\, u$$

の形に変換される。この微分方程式の形は turning point 問題での標準的な形でもある。さきほどの具体例の場合には、この微分方程式が Weber 方程式という性質のよく分かっている方程式であったために、その後の解析が容易に進んだ訳です。

ここでの、独立変数および従属変数の変換の形式に注意しておけば、

はじめの（変数変換前の）微分方程式が Matkowsky条件を満足すれば、この（変数変換後の）微分方程式も Matkowsky条件を満足することになる。この条件を確かめると

$$a_{m-1}(0)+m \quad \text{非正の偶数}$$

$$a_r(0)=0 \quad (r=0,1,\ldots,m-2)$$

であることが容易にわかる。この条件のもとで、εを消去する形での独立変数の変換 $x=\varepsilon^{1/(m+1)}t$ （stretching transformation)を実行すれば、次の形の微分方程式に変換されるとともに、その解の大域的性質を知る必要があることがわかる。また、この条件は都合のいいことに secondary turning point が現れないという条件にもなっているので、独立変数の変換で単独の方程式に変換可能になります。

$$y''-[z^{2m}+b_1z^{2m-1}+\ldots+\{b+b_{m+1}\}+z^{m-1}+\ldots+b_{2m}]y=0$$

ここで $b_1,\ldots,b_{m+1},\ldots b_{2m}$ は十分小である。この解をb_jに関して

$$\eta(z,b)+\sum_{j=1}^{2m}\eta_j(z,b)b_j+\ldots$$

と展開するとき、最も解に対して影響力があると考えられる$\eta(z,b$ については Weber の微分方程式を拡張したような形の微分方程式

$$\eta''-\{z^{2m}+bz^{m-1}\}\eta=0$$

を満足し、（$m=1$の場合には Weber関数である）正の実軸上 subdomiinant な解の大域的性質に関して以下の条件を満たすことがわかる。（文献［3］を参照）

$$\eta(x, b) = z^{-b/2-m/2}\exp[-z^{m+1}/(m+1)]\{1+O(z^{-1/2})\}$$

$$\eta'(x, b) = z^{-b/2+m/2}\exp[-z^{m+1}/(m+1)]\{-1+O(z^{-1/2})\}$$

$$\eta(0, b) = 2^{(m+b)/(2m+2)}(m+1)^{-(m+b)/(2m+2)}\frac{\Gamma(1/(m+1))}{\Gamma((b+m+2)/(2m+2))}$$

$$\eta'(0, b) = 2^{(m+b+2)/(2m+2)}(m+1)^{-1-(m+b)/(2m+2)}\frac{\Gamma(-1/(m+1))}{\Gamma((b+m)/(2m+2))}$$

Langer が Turning point の問題に、Airy関数の利用を試みたように、変わり点を含む微分方程式を大域的性質の分かった標準的な方程式に変換することは、変わり点問題に対する有効な方法である。それは一様簡略化と呼ばれたりするが、（詳しくは文献［5］，［7］）ここでの問題に対してもその手法は重要な役割を果たすことになる。ここで現れた、$T(x, \varepsilon)$ による従属変数の変換は形式的なものであったため、その変換を、上に述べた変換後の微分方程式の解の大域的性質を利用して、解析的な変換として求める必要がある。その結果、$T(x, \varepsilon)$ を漸近展開としてもつ解析的な従属変数の変換で、

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = [x^{2m} + \varepsilon \sum_{r=0}^{2m-2} \{a_r(\varepsilon) + \delta_r(\varepsilon)\} x^r] u$$

と変換することができる。ここで注意しなければいけない点は、角領域に依存しない一様な簡略化のためには、$\delta_r(\varepsilon)$として、漸近展開がゼロではあるが、完全には取り除けないわずかな量での調節が必要なことである。$\delta_r(\varepsilon)$の有無は解の量的な評価にはほとんど影響を及ぼさないので、変わり点問題の場合には何らの不都合を生じる事はないのではあるが、”共鳴”現象の場合には、この方程式の解と微分方程式を変わり点問題として取り扱うために行なったいくつかの変数変換を組み合わせたものがもとの特異摂動境界値問題の微分方程式の解になっているために、指数関数と組み合せた場合には予想外な影響を与えるかも知れない。従って、この解が Matkowsky の条件として与えられた形式的外部解に、εをゼロとした際に収束することを示すためには、$\delta_r(\varepsilon)$のより精密な量的な評価を求めておく必要がある。つまり、従属変数の変換で与えた指数関数の影響以上にわずかな量、つまり漸近展開がゼロであるとともに、ある指数関数のオーダーで漸近展開がゼロであるという形の

$$|\delta_r(\varepsilon)| \leqq C \exp[-r^{m+1}/|\varepsilon|]$$

であることをしめしておく必要がある。ただし、ここでrは考えている領域Dを円板としたときの半径（円板とは限らない場合には修正するとして）であり、Cは定数とする。この量的評価に関しては、微分方程式の接続係数に関するいささか面倒な計算を実行する必要があるので、省略せざるをえないが、（くわしくは文献［４］，［６］，［７］を参照）

その結果として解の正の実軸での漸近展開とそれがいくつかのストークス曲線を越えて接続したのちの負の実軸での漸近展開とを利用して、Matokowsky の条件で与えられた形式的外部解に収束することを示すことができる。つまり、”共鳴”現象であることが言えたことになる。

参考文献

[1]B.J.Matkowsky,On boundary layer problems exhibiting resonance, SIAM Rev.,17(1975),pp.82-100.

[2]R.E.O'mally,Jr,Introduction to singular perturbations,Academic Press,New York and London 1974

[3]S.Ohkohchi,An extension ofWeber's equation,Kumamoto J.Math.,3(1990).pp69-80.

[4]_______,Uniform Simplification at a transition point and the problem of resonance,SIAM J.Math.Anal.22(1991),pp.213-237.

[5]Y.Sibuya,Uniform Simplification in a full neighborhood of a transition point,Mem.Amer.Math.Soc.,149(1974).

[6]______,A theorem concerning uniform simplification at a transition point and the problem of resonance,SIAM J.Math. Anal.,12(1981),pp.653-668.

[7]W.Wasow,Linear Turning Point Theory,Springer-Verlag,Berlin, New York 1985.