数理解析研究所講究録
第792巻 1992年 1-8

P進クラス1 Whittaker関数について

京大教養 加藤信一 (Shin-ichi Kato)

1° 標題のクラス1 Whittaker関数は、保型形式のFourier係数と関連する、代数群上の"特殊関数"である。以下、どのような関数であるかを説明しよう。はじめに

k = 非アルキメデス的局所体

$\supset \mathcal{O}$ = 整数環 $\ni \pi$ = 素元、$q = \# \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$

G = 連結簡約群 / k (の k-有理点のなす位相群 $G(k)$ と G を同一視する)

但し k 上 split, $G/\mathbb{Z}$ と仮定しておく。

$K = G(\mathcal{O})$ G の極大コンパクト部分群

B = G の Borel 部分群 $\supset A$ = G の極大トーラス

$\supset N$ = G の極大巾単群

とおく。

まず、N の1次元表現 $\psi : N \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を1つ固定する。

次に

$$H(G,K) = \{\varphi : G \to \mathbb{C} \mid \text{(i) } \varphi \text{ は両側}K\text{-不変},\ \text{(ii) } \varphi \text{ の台はコンパクト}\}$$

とおく。$H(G,K)$ はたたみ込積 $*$ により可換 $\mathbb{C}$-代数をなす（G の K に関する Hecke環）。但し

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(g) = \int_G \varphi_1(gx^{-1})\varphi_2(x)\,dx$$

（dx は $\mathrm{vol}(K)=1$ なる G の Haar測度）。

そこで $\mathbb{C}$-代数準同型 $\omega : H(G,K) \longrightarrow \mathbb{C}$ を1つ選んでおく。

<u>定義</u>. G 上の関数 W が（ω, ψ に関する）クラス1 Whittaker関数（または不分岐Whittaker関数）であるとは，W が次の (i)〜(iii) を満たすことをいう。

(i) $W(gk) = W(g) \qquad (\forall k \in K)$

(ii) $W(ng) = \psi(n)W(g) \qquad (\forall n \in N)$

(iii) $W * \varphi = \omega(\varphi)W \qquad (\forall \varphi \in H(G,K))$ ■

さて，加法的指標 $\Psi : k \longrightarrow \mathbb{C}^*$ で $\Psi|_{\mathcal{O}} \equiv 1$，$\Psi|_{\varpi^{-1}\mathcal{O}} \not\equiv 1$ なるものを1つ用意する。$N \supset N_\alpha$ でルート部分群をあらわす時（α は (G,A) の正ルート），$\exists\, x_\alpha : k \xrightarrow{\sim} N_\alpha$（$\mathbb{Z}$ 上同型），ならびに

$$N/(N\text{の交換子群}) \cong \prod N_\alpha \quad (\alpha\text{は単純ルートを渡る})$$

が成り立つ。よって，N_α 上 $\psi|N_\alpha = \Psi\circ x_\alpha^{-1}$ となるような1次元表現 $\psi : N \longrightarrow \mathbb{C}^*$ が唯一つ定まる。以下、この ψ についてのみ考える。また，G, A の dual group をそれぞれ ${}^LG, {}^LA$（${}^LG$ は $\mathbb{C}$ 上の連結簡約群で ${}^LA$ はその極大トーラス）とする時，$\mathbb{C}$-代数準同型 ω 全体は ${}^LG$ の半単純共役類でパラメトライズされることが知られている（佐武）。これより $s\in{}^LA$ に対応する準同型を ω_s と書くことにする。

半単純元 $s\in{}^LA$ に対し

$WH(\psi, s)$ = ψ, ω_s に関するクラス1 Whittaker 関数全体のなすベクトル空間／$\mathbb{C}$

とおこう。Whittaker 関数の性質 (i)(ii) 及び岩澤分解，$G = NAK$ より $W\in WH(\psi, s)$ は A 上の（正確には A mod $A\cap K$ 上の）値で一意的に定まることがわかる。更に，一般に $A/A\cap K \xrightarrow[\sim]{\lambda} X({}^LA)$（${}^LA$ の指標群）なのだが，今 $\psi: N\longrightarrow\mathbb{C}^*$ を上記のように定めたことから，$W(a)\neq 0$ $(a\in A)$ なる，$\lambda(a) = \lambda(a \bmod A\cap K)$ $\in X({}^LA)$ は dominant ということが直ちにわかり，最終的には次の定理が示される。

定理. (i) (multiplicity 1) $\dim WH(\psi, s) = 1$.

(ii) (explicit formula) $s \in {}^L A$ に対して G 上の関数 W_s を

$$W_s(nak) = \begin{cases} \psi(n)\,\delta^{1/2}(a)\,\chi_{\lambda(a)}(s) ; & \lambda(a) \text{ が dominant な時} \\ 0 ; & \text{その他} \end{cases}$$

$$(n \in N,\ a \in A,\ k \in K)$$

とおくと, $W_s \in WH(\psi, s)$。 但し

χ_λ = dominant な λ を最高ウエイトに持つ ${}^L G$ の既約指標

$\delta : B \to \mathbb{C}^*$ は B の modulus character ■

定理は $G = GL_n$ の場合 [S], $G \neq E_8$ の場合 [K], 独立に, より強く split とは限らず G = unramified の場合 [CS] による。 但し [CS] には (ii) はない。 ([K] の (ii) の証明は [S] を一般化した, 差分方程式を用いるもので, split とは限らず成立。)

2° クラス 1 Whittaker 関数は, 保型形式の Fourier 係数の "一般化" であるから, これを用いての L 関数の構成が期待される (e.g. 解説記事 [Bu] を見よ)。 例えば, 最も安直に考えて, "Mellin 変換"

$$\int_{A_0} W_s(a)\,|\mu(a)|^{\sigma}\,da \qquad \left(\begin{array}{l} \sigma \in \mathbb{C} \text{ はパラメーター.} \\ A_0 \text{ は } A \text{ の適当な} \\ \text{部分トーラスで} \\ \mu : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\times} \end{array}\right)$$

が、局所L因子 $L(q^{-\sigma}, \pi, s) = \det(1 - q^{-\sigma}\pi(s))^{-1}$ (π は、${}^{L}G$ の有限次表現)で表わされるだろうか? ここで指標群 $X({}^{L}A)$ の群環を $R = \mathbb{C}[X({}^{L}A)]$ であらわし、その Weyl群 W 不変元全体を R^{W} とおくと、既約指標 $\chi_{\lambda} \in R^{W}$ であり、また不定元 t に対して、$L(t, \pi) = \det(1 - t\cdot\pi)^{-1} \in R^{W}[[t]]$ でもある。($L(t, \pi)^{-1} \in R^{W}[t]$ にも注意。) これより、上の“期待”は、Hecke級数と呼ばれる形式的巾級数

$$\sum_{\lambda \in \Lambda,\ \lambda \text{ は dominant}} \chi_{\lambda} \cdot t^{n(\lambda)} \qquad \left(\begin{array}{l} \Lambda \text{ は } X({}^{L}A) \text{ の適当な} \\ \text{部分格子で } n : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \text{は準同型} \end{array}\right)$$

が $L(t, \pi)$ たちを用いてあらわされ得るか、という純粋に組合せ論的な問題になる。そこで簡単な場合、$\Lambda = \mathbb{Z}\lambda$ (λ は dominant)、$n(\lambda) = 1$ の場合を考えてみよう。

$$HS(t, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \chi_{n\lambda} \cdot t^{n} \quad \in R^{W}[[t]]$$

とおく。一般の λ に対しては、この巾級数が良い性質を持つことを期待できないが、特別な、しかし重要な場合には、

次がわかる。（$HS(t,\lambda)$ の有理性は自明。）

<u>命題</u>. G を半単純古典群，λ を ${}^LG$ の基本ウエイトで λ を最高ウエイトに持つ ${}^LG$ の既約表現の 0 以外のウエイトは W－共役となるものとする。この時，$\exists M \in \mathbb{N}$，$\exists \varepsilon = \pm 1$ が存在して "関数等式"

$$HS(t^{-1},\lambda) = \varepsilon \cdot t^{M+1} HS(t,\hat{\lambda})$$

が成立する。ここで $\hat{\lambda}$ は λ の反傾表現 ■

上の ε，M は具体的に求まる。命題は簡約古典群のときも適当な modification の後に成立する。又，上記以外のウエイトで，同じ形の命題が成り立つ場合もある。命題の証明は多変数 Hecke 級数の場合（[O] Appendix の筆者の証明を見よ）と同様。

<u>系</u>. 命題の仮定の下で

$$HS(t,\lambda) = Q(t,\lambda)\, L(t,\pi_\lambda) \quad (Q(t,\lambda) \in R^W[t])$$

と分解され，"分子" $Q(t,\lambda)$ は

$$Q(0,\lambda) = 1, \quad \deg Q(t,\lambda) = \dim \pi_\lambda - (M+1)$$

$$Q(t^{-1},\lambda) = \varepsilon \cdot (-1)^{\dim \pi_\lambda}\, t^{(M+1)-\dim \pi_\lambda}\, Q(t,\hat{\lambda})$$

を満たす ■

例. (A) $G = PGL(n)$ $\quad {}^LG = SL(n, \mathbb{C})$
$\lambda =$ k 次外積表現, $\dim \pi_\lambda = \binom{n}{k}$.

この時. $M = n-1$, $\varepsilon = (-1)^{k(n-1)+1}$。ゆえに.
$Q(t, \lambda)$ は $\binom{n}{k} - n$ 次。例えば $k=1$ ($SL(n)$ の自然表現) ならば

$$Q(t, \lambda) = 1, \quad HS(t, \lambda) = L(t, \pi_\lambda).$$

($k \geqq 2$ だと $\deg Q$ が大きくなり, 一般にこの data だけでは Q が決定できない。)

(B) $G = PSp(2n)$ $\quad {}^LG = Spin(2n+1, \mathbb{C})$

(i) $\lambda = SO(2n+1)$ の自然表現. $\dim \pi_\lambda = 2n+1$.

この時. $M = 2n-3$, $\varepsilon = -1$. ゆえに

$$Q(t, \lambda) = 1 - t^2, \quad HS(t, \lambda) = (1-t^2) L(t, \pi_\lambda).$$

(ii) $\lambda =$ スピン表現 $\quad \dim \pi_\lambda = 2^n$

この時. $M = 2n-1$, $\varepsilon = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$. ゆえに

$$Q(t, \lambda) = \begin{cases} 1 & (n \leqq 2) \\ 1 - t^2 & (n = 3) \end{cases}$$

[cf. Bump : Generic Spin L for Sp(6)]

この場合も一般には $\deg Q = 2^n - 2n$ で, この data だけでは Q が決定できない。

(C), (D) も同様.

という具合に，局所的にはいくつかの場合で，Whittaker 関数の Hecke 級数を用いて"L関数"が構成されることがわかる。（もっともこれらは既知の結果の焼き直し，計算の工夫のみになるかも知れないが。）最後に，Whittaker 関数の代りに帯球関数を用いて Hecke 級数から"L関数"を構成した [Bo] に注意したい。このような種々の Hecke 級数からどのような"L関数"が得られるかを知ることは，表現論（古典的），組合せ論とも関係して（cf. [Bu] にある Littlewood − MacMahon の公式）興味深いのではないかと思われる。

References.

[Bo] S. Böcherer : Ein Rationalitätssatz für formale Heckereichen zur Siegelschen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56 (1986), 35-47.

[Bu] D. Bump : The Rankin-Selberg method: A survey, in: Number Theory, Trace formulas and Discrete Groups , Academic Press, 1989, pp.49-109

[CS] W. Casselman and J. Shalika : The unramified principal series of p-adic groups II: The Whittaker function, Compositio Math. 41(1980), 207-231.

[K] S. Kato : On an explicit formula for class-1 Whittaker functions on split reductive groups over p-adic fields, preprint, University of Tokyo (1978)

[O] T. Oda : Multiple Hecke series for class-1 Whittaker functions on GL(n) over p-adic fields, in: Analytic Number Theory Springer Lecture Notes in Math. 1434

[S] T. Shintani : On an explicit formula for class-1 'Whittaker functions' on GL(n) over p-adic fields, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 180-182.