数理解析研究所講究録
第792巻 1992年 26-38

次数2のSiegel modularのWhittaker function

名古屋市立保育短大　丹羽伸二 (Shinji Niwa)

この講演では表題のWhittaker functionの(explicit formulaが得られるような)構成法と、そのWhittaker functionのdouble Mellin transformおよび$SL(2)$のWhittaker functionとのconvolutionについて述べた。勿論, Mellin transformやconvolutionを求めるのにWhittaker functionのexplicit formulaを使うが, そのため計算は楽になっているものと思われる。基本的な文献はSoudry [16]で, そこでnonarchimedeanな局所体上での話はほとんど済んでいるのでarchimedeanな場合を主として取り扱う。

1. $GSp(2, k)$上のWhittaker functionの構成法

kを局所体, ψをkのadditive character, $V = M_{2,2}(k)$, $V \times V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in V \right\}$とする。$f \in \mathcal{S}(V)$に対し$Sp(2, k)$のWeil表現$r$を

$$r\begin{pmatrix}E & X\\ 0 & E\end{pmatrix} f\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} = \psi(\mathrm{tr}(X\,{}^tX_1 X_2))\, f\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix},$$

(1) $$r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & {}^tA^{-1}\end{pmatrix} f\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} = |\det A|^2 f\begin{pmatrix}X_1A\\ X_2A\end{pmatrix},$$

$$r\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix} f\begin{pmatrix}Y_1\\ X_2\end{pmatrix} = \int_V\int_V \psi(\mathrm{tr}({}^tY_1 X_2 + {}^tY_2 X_1))\, f\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix} dY_1\, dY_2$$

によって定義する。$X_i \in V$, ${}^tX = X \in V$, $A \in V$, $E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である。例えば

(2) $$r\begin{pmatrix}aE & 0\\ 0 & E\end{pmatrix} f\begin{pmatrix}X_1\\ Y_2\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}aX_1\\ X_2\end{pmatrix}$$

によって r を $GSp(2,k)$ に拡張できるが、$GSp(2,k)$ への拡張は色々ある。さて

(3) $$X = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} \in M_{4,1}(k) \text{ に対し } \sigma(X) = \begin{pmatrix}a & d\\ b & -c\end{pmatrix}$$

とおき、$(g,h) \in GL(2,k)\times GL(2,k)$ の $V\times V$ への作用を

(4) $$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}^{(g,h)} = \left(\sigma^{-1}\left({}^tg\left(\sigma\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\\ x_{41}\end{pmatrix}\right)h\right), \sigma^{-1}\left({}^tg\left(\sigma\begin{pmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\\ x_{42}\end{pmatrix}\right)h\right)\right)$$

で定義する。ただし

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$$

である。$f \in \mathcal{S}(V \times V)$, $g \in GL(2,k)$ に対し

(5) $$\rho(g) f(X) = f(X^g)$$

によって $GL(2,k) \times GL(2,k)$ の表現 ρ を定義する。
$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $GL(2,k) \times GL(2,k)$
の中の $(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の stabilizer は

$$F = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \right) \middle| \, x \in k \right\}$$

で, $n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ に対し

$$(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))^{(n,1)} = (\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))^{(1,n^{-1})},$$

(6) $$\rho(n,1) f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) = r\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{pmatrix} f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)),$$

$$r\begin{pmatrix} E & \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{matrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) = \psi(x_3) f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2))$$

となることがすぐ解かるので, $H = GL(2,k) \times GL(2,k)$

上で $GL(2,k)$ の Whittaker function と掛けて平均すれば Whittaker function が得られる。π_1, π_2 を $GL(2,k)$ の admissible representation とし，$\mathcal{W}(\pi, \psi)$ を π の Whittaker model とする。$W_i \in \mathcal{W}(\pi_i, \psi)$, $g \in GSp(2,k)$ に対し

(7)
$$\widetilde{W}(g) = \int_{F \backslash H} r(g)\rho(h_1, h_2) f(\sigma^{-1}(M_1), \sigma^{-1}(M_2)) W_1(h_1) W_2(h_2)\, dh_1\, dh_2$$

とおくと

(8)
$$\widetilde{W}\left(\begin{pmatrix} 1 & x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{matrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} g\right) = \psi(x_0 + x_3)\widetilde{W}(g)$$

が成り立つ。勿論，(8)だけで $\widetilde{W}$ が Whittaker function だとは言えなくて，例えば $k=\mathbb{R}$ の場合なら不変微分作用素の固有関数でなければならない。

(7)の例として $k=\mathbb{R}$ の場合を考えると

(9)
$$\widetilde{W}\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} E & x_1 & x_2 \\ & x_2 & x_3 \\ \hline & E & \end{array}\right)\begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & & & \\ & \sqrt{y_2} & & \\ & & \sqrt{y_1}^{-1} & \\ & & & \sqrt{y_2}^{-1} \end{pmatrix} k\right)$$

$$= \exp(2\pi i(x_0 + x_3)) \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty v_1^{-1} v_2^{-1}\, y_1 \sqrt{y_2}\, K_{\nu_1}(2\pi v_1)\, K_{\nu_2}(2\pi v_2)$$

$$\exp\left(-\pi\left(\frac{y_1}{v_1 v_2} + \frac{v_1 v_2}{y_2} + \left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_2}\right) y_2\right)\right) dv_1\, dv_2$$

となる。$f \in \mathcal{S}(V \times V)$ として $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \exp(-\pi\, \mathrm{tr}({}^t x_1 x_1 + {}^t x_2 x_2))$ を取った。$k \in SO(4) \cap Sp(2, \mathbb{R})$ で, K_ν は modified Bessel function である。(9) の $\widetilde{W}$ と

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = Z = g\, i E$$

に対し $W_{\nu_1, \nu_2}(Z) = \widetilde{W}(g)$ とおくと

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned} &\Delta_1 W_{\nu_1, \nu_2}(Z) = d_1 W_{\nu_1, \nu_2}(Z), \\ &\Delta_2 W_{\nu_1, \nu_2}(Z) = d_2 W_{\nu_1, \nu_2}(Z), \\ &d_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 - 2)/8, \\ &d_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{256} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{32} + \frac{3}{64}, \\ &\lambda_1 = \nu_1^2 - \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = \nu_2^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。Δ_1, Δ_2 は [9] の不変微分作用素で

$$\Delta_1 = \sum_{i,j=1}^{3} y_i y_j \partial_i \bar{\partial}_j - d\left(\partial_1 \bar{\partial}_3 + \bar{\partial}_1 \partial_3 - \frac{\partial_2 \bar{\partial}_2}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 = & d^2\left(\partial_1\partial_3 - \frac{\partial_2^2}{4}\right)\left(\bar\partial_1\bar\partial_3 - \frac{\bar\partial_2^2}{4}\right)\\ & + \frac{\sqrt{-1}}{4} d\left(\sum_{i=1}^{3} y_i\partial_i\right)\left(\bar\partial_1\bar\partial_3 - \frac{\bar\partial_2^2}{4}\right)\\ & + \frac{\sqrt{-1}}{4} d\left(\sum_{i=1}^{3} y_i\bar\partial_i\right)\left(\partial_1\partial_3 - \frac{\partial_2^2}{4}\right)\\ & + \frac{d}{16}\left(\partial_1\bar\partial_3 + \bar\partial_1\partial_3 - \frac{\partial_2\bar\partial_3}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \bar\partial_i = \frac{\partial}{\partial \bar z_i}, \quad d = y_1y_3 - y_2^2$$

である。(10) の証明は例えば次のようにすればできる。

$$\varphi(y_1, y_2) = y_1^{-1}\sqrt{y_2}^{-1} W_{\nu_1,\nu_2}\begin{pmatrix}\sqrt{y_1} & & & \\ & \sqrt{y_2} & & \\ & & \sqrt{y_1}^{-1} & \\ & & & \sqrt{y_2}^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\varphi\left(x + \frac{1}{y_2}, y_2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_2)\, x^n$$

とおくと微分方程式(10)は a_n の漸化式になる。a_0 が決まれば
すべての a_n が決まることが解るが，更に(10) の 2 つの微分方
程式の compatibility condition から a_0 は 8 次の常微分
方程式をみたさなければならない。その常微分方程式は残念
ながら 2000 行ぐらいの極めて長い式であるが，

$$a_0(y) = \int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-\pi\left(\frac{v_1v_2}{y} + \left(\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}\right)y\right)\right) K_{\nu_1}(2\pi v_1)\, K_{\nu_2}(2\pi v_2)\, \frac{dv_1}{v_1}\frac{dv_2}{v_2}$$

がその方程式をみたすことは，部分積分と K_ν の微分方程式

によって(計算機を使えば)確めることが出来る。Bump [3] のように発展方程式を用いるなどしてもっと簡単に(10)が示せると思われるがよく解からない。なお (8), (10) をみたす $\widetilde{W}(g)$ は定数倍を除いて unique であることが知られているので(Hashizume [5], [6]), (9) はそのような関数 Whittaker function の explicit formula を与えていることになる。

2. double Mellin transform

(9) で決まる W_{ν_1,ν_2} の double Mellin transform は 2, 3 の積分公式を組み合せると次のように求まる。

定理1.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty W_{\nu_1,\nu_2}\begin{pmatrix} & & & y_1\\ & & y_2 & \\ & y_1^{-1} & & \\ y_2^{-1} & & & \end{pmatrix} y_1^{s_1} y_2^{s_2}\frac{dy_1dy_2}{y_1y_2} \tag{11}$$

$$= -\frac{1}{64}\pi^{-(3s_1+s_2+7)/2}\,\Gamma\left(\frac{s_1+s_2-2\nu_1+3}{4}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{s_1+s_2-2\nu_2+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2\nu_1+3}{4}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2\nu_2+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+2}{2}\right)$$

$$\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+\nu_1-\nu_2+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1-\nu_1-\nu_2+2}{2}\right)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma\left(\frac{3s_1+s_2-2\nu_2+7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+2\nu_2+3}{4}\right)}\times\right.$$

$$
{}_3F_2\left(\frac{s_1+\nu_1-\nu_2+2}{2}, \frac{s_1-\nu_1-\nu_2+2}{2}, \frac{s_1+s_2-2\nu_2+3}{4};\right.
$$
$$
\left.-\nu_2+1, \frac{3s_1+s_2-2\nu_2+7}{4}; 1\right) +
$$

$$
\frac{\Gamma\left(\frac{s_1+\nu_1+\nu_2+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1-\nu_1+\nu_2+2}{2}\right)\Gamma(-\nu_2)}{\Gamma\left(\frac{3s_1+s_2+2\nu_2+7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2-2\nu_2+3}{4}\right)} \times
$$

$$
{}_3F_2\left(\frac{s_1+\nu_1+\nu_2+2}{2}, \frac{s_1-\nu_1+\nu_2+2}{2}, \frac{s_1+s_2+2\nu_2+3}{4};\right.
$$
$$
\left.\nu_2+1, \frac{3s_1+s_2+2\nu_2+7}{4}; 1\right) \Bigg\}
$$

ここで ${}_3F_2$ は generalized hypergeometric function

(12)
$$
{}_3F_2(a_1, a_2, a_3; a_4, a_5; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n}{n!(a_4)_n (a_5)_n} z^n
$$

である。${}_3F_2$ は $a_4+a_5=a_1+a_2+a_3+1$ のとき Saalschützian といって $z=1$ の値が Γ-関数の積で表わせるが，(11) に表れる ${}_3F_2$ は Saalschützian ではなくて，$\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_4+1)+a_3=a_5$ を満たしている。Bailey [1] に ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; a_4, a_5; 1)$ の一次関係式の完全な(?)リストがあるが，それらのどれを適用しても (11) の右辺は Γ関数の積になることはないようである。${}_2F_1$ については Gauss の公式

$$
{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}
$$

があることに注意する。伊吹山氏に講演のあと，一般の場合

を予想するように言われたが，$Sp(2) \simeq SO(3,2)$ だから ${}_3F_2$ が (11) に現われるのであって $SO(n+1,n)$ の Whittaker function の多重 Mellin 変換は ${}_{n+1}F_n$ で表わせるかも知れない。

3. convolution

Bump [2] では $SL(3,\mathbb{R})$ の Whittaker function と $SL(2,\mathbb{R})$ の Whittaker function の convolution が Γ 関数の積（local L-function に一致）になることが示されている。ここでは $Sp(2,\mathbb{R})$ の Whittaker function と $SL(2,\mathbb{R})$ の Whittaker function で同様のことを示す。Bump [2] では Barnes の second lemma を使うが，ここでは Whittaker function の explicit formula (9) を用いて直接 convolution が計算でき，その帰結として（定理1を使って）Barnes の second lemma の類似を得ることになる。

定理2.

$$
(13)\quad \int_0^\infty \int_0^\infty W_{\nu_1,\nu_2}\begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & & & \\ & \sqrt{y_2} & & \\ & & \sqrt{y_1}^{-1} & \\ & & & \sqrt{y_2}^{-1} \end{pmatrix} \sqrt{y_2}\, K_\nu(2\pi y_2)\; y_1^{s-2}\, dy_1\, y_2^{-2}\, dy_2
$$

$$
= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\pi^{-s}\Gamma(s)} \times
$$

$$\times \pi^{-2s}\Gamma\left(\frac{s+\nu_1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu_1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\nu_1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu_1-\nu}{2}\right)$$

$$\times \pi^{-2s}\Gamma\left(\frac{s+\nu_2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu_2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\nu_2-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu_2-\nu}{2}\right)$$

(13) の右辺の第2行目，第3行目はそれぞれある admissible representation π_1, π_2 の local L-function $L(s,\pi_1), L(s,\pi_2)$ である。(10) において $\nu_1=\nu_1$，$\nu_2=\nu$ としてそれから d_1, d_2 や $W_{\nu_1,\nu}$ がきまるが $W_{\nu_1,\nu}$ の $Sp(2,\mathbb{R})$ による右-translation で生成される関数空間における $Sp(2,\mathbb{R})$ の右-translation による表現が π_1 である。$W_{\nu_2,\nu}$ から同様に構成される表現が π_2 である。W_{ν_1,ν_2} に対応する Siegel wave form F (ν_1, ν_2 から (10) できまる d_1, d_2 に対し $\Delta_1 F = d_1 F$，$\Delta_2 F = d_2 F$ となる F) と Laplacian の固有値が $\lambda = \nu^2 - \frac{1}{4}$ である Maass wave form f の L 関数のテンソル積 (Rankin convolution) の Γ-factor は $L(s,\pi_1)L(s,\pi_2)$ だから定理2は

(14) "The local integral does agree with the local L-function"

という Bump の言葉で表現できる。

定理2の証明には公式

$$(15)\qquad \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{2}-\frac{z^2+w^2}{2y}\right)K_\nu\left(\frac{zw}{y}\right)\frac{dy}{y} = K_\nu(z)K_\nu(w)$$

を用いる。(15)はWatson [19] に最も簡単な証明がのっているが，K_νを積分表示しておき積分の順序を変え適当に変数変換をすれば(15)の右辺になる。従ってそのようなことはnon-archimedeanの場合も出来ると思われるが，実際，次のことが成り立つ。$k=\mathbb{Q}_p$，$\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p$，Φを$\mathcal{O}$のcharacteristic functionとしπを$GL(2,k)$のadmissible representation，$\mathcal{W}(\pi,\psi)$をπのWhittaker modelとするとπが既約なら

補題　$W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$で$W$が右-$GL(2,\mathcal{O})$不変なら

$$(16)\qquad \int_k \Phi(y)\Phi\left(\frac{z}{y}\right)\Phi\left(\frac{w}{y}\right)\omega_\pi(y)W\begin{pmatrix}\frac{zw}{y^2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}dy = W\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}W\begin{pmatrix}w & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここでω_πはπのcentral charaterである。dyはkのadditiveなHaar measureである。この証明は$W(g)$の積分表示を用いて簡単に出来る。この補題を用いてnon-archimedeanの場合も(13)，(14)に当るものを示すことが出来る。Soudry [16] では(16)に対応する式がある。(16)のΦはいわば変形Bessel関数に当っているが，Soudry

〔16〕ではBessel関数J_νに当たるもので(16)の式を作っているので難しくなっている。筆者は最近志村対応の拡張に成功したが、その中で(13)を用いるので、ここに(13)を定理として書いておくことも少しは意味があるのではないかと思う。

REFERENCES

1. W. N. Bailey, "Generalized hypergeometric series," Cambridge, 1935.
2. D. Bump , ***Barnes second lemma and its application to Rankin-Selberg convolutions***, Amer. J. of Math. **109** (1987), 179-186.
3. ———, ***Automorphic forms on** $GL(3,\mathbf{R})$*, Lect. Notes in Math. **1083** (1984).
4. ———, "The Rankin-Selberg method. In : Number theory, trace formulas and discrete groups: a symposium in honor of Atle Selberg," Academic Press, 1989.
5. M. Hashizume, ***Whittaker functions on semesimple Lie group and their applications***, 数理研講究録 631 (1987) , 123-137.
6. M. Hashizume, ***Whittaker functions on semesimple Lie groups***, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 259-293.
7. R. Howe and I. I. Piatetski-Shapiro, *Some examples of automorphic forms on* Sp_4, Duke Math. J. **50** (1983), 55-106.
8. S. Nakajima , ***Invariant differential operators on** $SO(2,q)/SO(2)\times SO(q)$ $(q \geq 3)$*, Master these, Univ. of Tokyo.
9. ———, ***On invariant differential operators on bounded symmetric domains of type 4***, Proc. Japan Acad. **58, Ser. A** (1982), 235-238.
9. S. Niwa, ***On generaliged Whittaker functions on Siegel's uper half space of degree 2***, Nagoya Math. J. **121** (1991), 171-184.
10. M. E. Novodvolsky , ***Fonctions J pour** $GSp(4)$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **280** (1975), 191-192.
11. ———, ***Automorphic** L**-functions for symplectic group** $GSp(4)$*, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), 87-95.
12. T. Oda, ***On Whittaker functions of class 1 on** $Sp(2,\mathbf{R}) = Sp_4(\mathbf{R})$*, 数理研講究録 689 (1989) , 148-164.
13. I. I. Piatetski-Shapiro and D. Soudry , *L **and** ϵ **functions for** $GSP(4)\times GL(2)$*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81** (1984), 3924-3927.
14. ———, ***Automorphic forms on the symplectic group of order four***, Lecture Notes of I.H.E.S. (1983).
15. D. Soudry , ***A uniqueness theorem for representations of** $GSO(6)$ **and the strong multilicity one theorem for generic representations of** $GSp(4)$*, Israel J. of Math. **58** (1987), 257-287.
16. ———, ***The** L **and** γ **factors for generic representations of** $GSp(4,k)\times GL(2,k)$ **over a local nonarchimedean field** k*, Duke Math. J. **51** (1984), 355-394.
17. E. Stade , ***On explicit integral formulas for** $GL(n,\mathbf{R})$**-Whittaker functions***, Duke Math. J. **60** (1990), 313-362.
18. ———, ***Poincaré series for** $GL(3,\mathbf{R})$**-Whittaker functions***, Duke Math. J. **58** (1989), 695-729.
19. G. N. Watson, "Treatise on the theory of Bessel functions," Cambridge Univ. Press, 1944.