数理解析研究所講究録
第798巻 1992年 180-190

可算状態マルコフ連鎖のローラン展開について

和歌山大教育　門田良信 (Yoshinobu Kadota)

§1.表記と概念

可算集合Sを状態空間とする定常マルコフ連鎖（今後,M.C.と略記する）は，初期分布（ $p_i;i\in S$ ）と推移確率行列 $P=(p_{ij};i,j\in S)$によって特徴付けられる。以下においては,任意の $i,j\in S$について $p_{ij}\geqq 0$, 任意の $i\in S$について $\sum_{j\in S} p_{ij}=1$ としておく．

$p^0_{ij}=\delta_{ij}$, $p^1_{ij}=p_{ij}$, $p^n_{ij}=\sum_{k\in S} p^{n-1}_{ik}p_{kj}$ と表し，推移確率行列を$P^0=I$（単位行列），$P^n=(p^n_{ij};i,j\in S)$ とする．

平均ｴﾙｺﾞｰﾄﾞ定理により，任意の $i,j\in S$について

$$p^*_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p^k_{ij}$$

が存在して，$0\leqq\sum_{j\in S}p^*_{ij}\leqq 1$ を満たす。$P^*=(p^*_{ij};i,j\in S)$ とおくと，P^*は方程式$PP^*=P^*P=P^*$ を満たす。

任意の $i\in S$, $E\subset S$, n について

$$p^n(i,E)=\sum_{j\in E}p^n_{ij}$$

と表すことにする．p^* については，

$$p^*(i,E)=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p^k(i,E)$$

と表す．従って，$p^*(i,E)=\sum_{j\in E}p^*_{ij}$ は一般には成立しない．また，

$p^*(i,E)$の値が i に無関係に定まるとき，これを $p^*(E)$ と書くことにする．

任意の行列 $A=(a_{ij};i,j\in S)$ について，

$$\|A\|=\sup\{|\sum_{j\in E} a_{ij}|;\ i\in S,\ E\subset S\}<\infty$$

ならば，Aは有界であると言う．

いま特に，Sが有限集合とすると I，Pは有限次元行列となり，$\sum_{j\in S} p^*_{ij}=1$ かつ $(I-P+P^*)$ は正則となる．$H=(I-P+P^*)^{-1}-P^*$とおけば，Hは方程式

(1) $\qquad H(I-P)=(I-P)H=I-P^*,\quad HP^*=P^*H=0$

を満たす唯一の解となる． ただし、0は零行列とする．さらに，$0<\beta<1$ なる任意のβをとり，$\beta=1/(1+\rho)$，$\rho>0$ とおくと

(2) $\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n P^n=(1+\rho)\left(\frac{1}{\rho}P^*+\sum_{n=0}^{\infty}(-\rho)^n H^{n+1}\right)$

が成立する．(2)をM.C.{P}のﾛｰﾗﾝ展開と呼ぶ．

§2．問題と概要

Sが可算集合のときには，$(I-P+P^*)$に関する正則性の議論が出来ないので，上記(1),(2)を導くのは簡単ではない．この報告は，状態空間Sが可算のときに M.C.のｴﾙｺﾞｰﾄﾞ定理を使って，(1),(2)が成立するための十分条件について考察する．この様な問題は，[3]，[6] 等により多くは推移確率行列のqussi-compact性やそれと同値なDoeblin条件の下で考えられてきた。また，[5] の様に、独自な条件の下で考えたものもある．ここで扱う条件は次の 3つである．

条件(A)(Doeblin) すべての $i \in S$ について，$p^N(i, K) \geqq c$ を満たす自然数 N，有限集合 $K \subset S$，正の数 c が存在する．

条件(B)（一様有界性）任意の $i \in S$，$E \subset S$，自然数 n について，

$$(3) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} \left(p^k(i, E) - p^*(i, E) \right) \right| \leqq B$$

を満たす定数 B が存在する．

条件(C)（一様平均ｴﾙｺﾞｰﾄﾞ性）

$$p^*(i, E) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p^k(i, E)$$

が存在して，任意の $i \in S$，$E \subset S$ に関して一様収束する．

これらの条件のもとでは $\sum_{j \in S} p^*_{ij} = 1$ が成立している．しかし、この式は(1),(2)が成立するための十分条件となっていないことを、次の§2で示す．

M.C.を確率変数の列 $\{X_n\}$ で表すとき，任意の $i, j \in S$，自然数 n に対して

$$f^n_{ij} = P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \cdots\cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i)$$

$f^*_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f^n_{ij}$ とおく． f^*_{ij} は i から出発していつかは j に到達する確率を示す． $f^*_{ii} = 1$ ならば i をrecurrent state と呼び，$f^*_{ii} < 1$ ならば i をtransient state と呼ぶ。recurrent states, transient states の全体を，それぞれR，Tで表す．状態(states) $i, j \in R$ について $p^n_{ij} > 0$ ならば，必ず自然数 m が存在して，$p^m_{ji} > 0$ となるとき，$i \sim j$ と表す．$\sim$ はR上の同値関係となる．この同値関係の同値類を recurrent class と呼び，E_a，$a\in A$で表わす．任意の $i\in E_a$ について，$\sum_{j\in E_a} p^*_{ij} = 1$ ならば E_a を positive recurrent class と呼び，これが成り立たなければ null recurrent class と呼ぶ．上記の 3つの条件のもとでは，必ず positive recurrent class が存在し， null recurrent class は存在しないことが解る．

以上の表記を使って，得られる結論は次のようになる．

定理(Ⅰ) (A)が成立すれば(B)が成立する．(B)が成立すれば (C)が成立する．

(Ⅱ) (B)が成立するとき，$0<\beta<1$ について，$\beta=1/(1+\rho)$,

$$h(\rho)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} (p^n_{ij} - p^*_{ij})\beta^n,$$

とおくと，$h_{ij} = \lim_{\rho\to 0} h(\rho)_{ij}$ が存在する．$H=(h_{ij};i,j\in S)$ とおくと，Hは(1)を満たす唯一の有界な行列であり，ﾛｰﾗﾝ展開(2)が成立する．

(Ⅲ) (A)が成立するための必要十分条件は，(B)が成立してかつ recurrent classes の数が有限個となることである．

(Ⅳ) recurrent classesの数が有限個ならば、(B)と(C)は同値である．

この定理の証明のうち，(Ⅰ)の前半と(Ⅱ)は，[6] を参照してもらうことにして，ここでは省略する．(Ⅰ)の後半については，(3)を n で割ることにより，

$$(4)\qquad \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^k(i,E) - p^*(i,E) \right| \leqq \frac{B}{n} .$$

ここで $n\to\infty$ にとることによって得られる．従って，問題とするのは(Ⅲ)，(Ⅳ) である．これらの証明の概略を，以下に示そう．

§3. 到達集合に関する一様条件

ﾛｰﾗﾝ展開を導くためには，何等かの条件が必要である．この報告では，ｴﾙｺﾞｰﾄﾞ定理に一様収束性を付加して考察する．まず到達集合に関する一様条件を仮定すると，次の補助定理を得る．ただし，(a)と(b)の同値性は [1] によって得られている．他の命題についても証明は比較的簡単だから省略する．

補助定理 1．任意の $i \in S$ を固定するとき，次の命題は同値である．

(a) $p^*(i,S) = \sum_{j \in S} p^*_{ij} = 1.$

(b) $j \in E$ に関する和 $\sum_{j \in E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p^{k}_{ij} \right)$ は n について一様収束する．

(c) 任意の $E \subset S$ に対して，$p^*(i,E) = \sum_{j \in E} p^*_{ij}$ ．

(d) $p^*(i, E) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p^{k}(i, E)$ が存在して，$E \subset S$ に関して一様収束する．

すべての $i \in S$ について補助定理1が成立するとき，(1)，(2)が得られるであろうか．次の例はSが唯一の non cyclic recurrent class からなる簡単な場合においても，これに対して否定的に答えている．

例 1．$S = \{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ ．

$$p_{00} = 0, \quad p_{0i} = (1/2^{i}), \ i = 1, 2, 3, \cdots\cdots.$$

$$p_{i+1\ i} = 1, \quad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots.$$

$$i \neq 0, \ j \neq i \text{ ならば } p_{i+1\ j} = 0.$$

と定義する．

(a) $f^{n}_{00} = (1/2^{n-1}), \ n = 2, 3, 4, \cdots\cdots, \quad \therefore \ f^*_{00} = 1.$

(b) $m_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{n} = 3.$　$\therefore\ p_{00}^{*} = (1/m_{00}) = \dfrac{1}{3} > 0$

これより，すべての i∈S について補助定理1 が成立することが解る．

(c) $p_{00}^{2} = \dfrac{1}{2}$，　$p_{00}^{3} = \dfrac{1}{4}$．よって non-cyclic.

(d) $P^{*}P = P^{*}$よりP^{*}を求めると，P^{*}の行はすべて

$p_{i0} = \dfrac{1}{3}$，　$p_{ij} = (1/3\cdot 2^{j-1})$，$j = 1, 2, \cdots\cdots$となる．

(e) $(I-P)H = I - P^{*}$，　$P^{*}H = 0$ より$H = (h_{ij})$を求めると，

$h_{00} = (2/3)^{2}$，　$h_{0j} = -(2/3^{2})(1/2^{j-1})$，$j = 1, 2, \cdots\cdots$．

$i \geqq 1$ のとき，

$h_{i0} = (2/3)^{2} - (i/3)$，

$h_{ij} = 1 - \{(2/9) + (1/3)i\}/2^{j-1}$，$j = 1, 2, \cdots, i$．

$h_{ij} = -\{(2/9) + (1/3)i\}/2^{j-1}$，$j = i+1, i+2, \cdots\cdots$．

(f) (e)の解 $H = (h_{ij})$ は $HP^{*} = 0$を満たす．また，$i = 0$ または $j = 0$ ならば $[H(I-P)]_{ij} = [I - P^{*}]_{ij}$ であるが，$i, j \geqq 1$ ならば $[H(I-P)]_{ij} \neq [I - P^{*}]_{ij}$ となる．実際，

$$[H(I-P)]_{ij} = \begin{cases} -(1/3\cdot 2^{j})\{(2/3)+i\}, & 1 \leqq j < j+1 \leqq i \text{のとき．} \\ 1+(1/2)^{i}\cdot\{(2/9)+(1/3)i\}, & 1 \leqq i = j \text{ のとき．} \\ -(1/3\cdot 2^{j-1})\{(1/3)+(1/2)i\} & 1 \leqq i < j \text{ とき．} \end{cases}$$

以上により，(1)を満たすHは存在しない．

§4. 初期状態に関する一様収束性

§3で見たように到達集合に関する一様条件だけではうまくいかないから，これに初期状態に関する一様収束性を付け加えて出来たものが，§2の条件(A),(B),(C)である．この§では定理(Ⅲ),(Ⅳ)の証明に必要な補助定理について述べる．次の補助定理2. は［4］の記述を可算状態空間の場合に書き直したものである．補助定理3 は補助定理2 を ｴﾙｺﾞｰﾄﾞ定理を使ってE_a上に応用したものである。補助定理4 は条件(A),(B),(C)がE_a上では同値となることを述べている．補助定理4 の証明については，(a)⇒(b)は［5］の Thm.11.3 より得られ、(b)⇒(c)は補助定理3 がそれに当っている．それ以外は明らかである．

補助定理2. 任意の $i\in S$，$j\in K$ について，$p^N(i,j)\geqq c$ を満たす自然数 N，有限集合 $K\subset S$，正の数 c が存在するとき，集合 K に含まれる状態の個数を m とすれば，すべての $i\in S$，$E\subset S$，$r=0, 1, 2, \cdots, N-1$ について，次の不等式が成立する．

$$|p^{nN+r}(i, E)-p^*(E)|\leqq(1-mc)^n$$

補助定理3. $S\supset E_a$を positive recurrent class，d をE_aの周期とし，$C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$を$E_a$の syclic classes とする．M.C. $\{p_{ij}; i,j\in S\}$が条件(A)を満たすとする．

(a) 与えられたM.C. のE_a上への制限$\{p_{ij}; i,j\in E_a\}$は条件(A)を満たす．

(b) $\{p^d_{ij}; i,j\in E_a\}$は C_ν上の M.C. となり，各$\nu=0, 1, 2, \cdots, d-1$について補助定理2.の条件を満たす．従って，自然数 N と定数 $0<\rho<1$ が存在して，任意の n, $E\subset E_a$，$i\in C_\beta$ について

$$|\sum_{k=1}^{n} p^{k}(i,\ E)-p^{*}(E)|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{r=0}^{N-1} |\sum_{\nu=1}^{d} p^{kNd+rn+\nu}(i,E\cap C_{\nu+\beta})-p^{d*}(E\cap C_{\nu+\beta})|$$

$$\leqq (Nd)/\rho < \infty \qquad (\text{ mode } d\ ).$$

ただし、$i\in C_{\nu}$ について $p^{d*}(E\cap C_{\nu})=\lim_{n\to\infty} p^{nd}(i,E\cap C_{\nu})$ とする．

補助定理4．$S\supset E_a$を positive recurrent class, d をE_aの周期とし，$C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$を$E_a$の syclic classes とする．このとき，M.C. $\{p_{ij}; i,j\in S\}$ について，次の命題は同値となる．

(a) 次を満たす有限集合 $K\subset E_a$が存在する．

(a-1) $K\cap C_{\nu}\neq\phi$, $\nu=0,\ 1,\cdots,d-1$.

(a-2) 任意の$\varepsilon>0$ に対して次を満たす自然数 N が存在する．

$n\geqq N$ ならば，任意の $i\in E_a$, $\nu=0,\ 1,\cdots,d-1$ について

$$|p^{nd}(i,\ K)-p^{d*}(K)|<\varepsilon\ .$$

(b) M.C. のE_a上への制限 $\{p_{ij};\ i,j\in E_a\}$ は条件(A)を満たす．

(c) M.C. のE_a上への制限 $\{p_{ij};\ i,j\in E_a\}$ は条件(B)を満たす．

(d) M.C. のE_a上への制限 $\{p_{ij};\ i,j\in E_a\}$ は条件(C)を満たす．

§5．定理の証明

補助定理5．条件(C)が成立しているものとする．このとき，任意の $0<\varepsilon<1$ に対して，次を満たす自然数 N が存在する．すべての $i\in S$, $E\subset T$, $r=1,\ 2,\cdots,N-1$, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ について，

$$p^{nN+r}(i,E)<\varepsilon^{n}. \tag{5}$$

従って，

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p^{n}(i,\ E) \leqq \{N\ /(1-\varepsilon)\}^{2} < \infty.$$

証明．$0 \leqq p^{n}(i,E) \leqq p^{n}(i,T)$ より，Tについて(5)を示せば十分である．条件(C)より，補助定理1が成り立つから，すべての $i \in S$ について $p^{*}(i,R)=1$．また $\{p^{n}(i,T)\}$ は n について単調減少だから，

$$p^{n}(i,T) \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^{k}(i,\ T) = p^{*}(i,R) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^{k}(i,R).$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな N をとれば，$n \geqq N$ について右辺は ε で押えられる。よって $n=1$ として(5)が示された。n に関する帰納法により(5)が示される．n について加えることにより(6)を得る．□

任意の $i,j \in S$，$E \subset S$，$n=1,2,\cdots$ について，i から出発して途中 E に達することなく，時刻 n で初めて j に到達する確率を ${}_{E}f_{ij}^{n}$ で表す．従って，$\sum_{j\in E} {}_{E}f_{ij}^{n}$ は 時刻 n で初めて E に到達する確率を表す．

定理(Ⅲ)の証明．条件(A)が成立するとする．任意の E_a，$i \in E_a$，n について，$p^{n}(i,E_a)=1$ より，$K \cap E_a \neq \phi$．よって E_a の個数は有限個．任意の $E \subset E_a$ は，$E=(E \cap T)+\sum_{a=1}^{m}(E \cap E_a)$ と分割される。補助定理4(b)，(C)および補助定理5の前半を使って (3)を得る。逆に，(3)を n で割ることにより補助定理1が成立する。従って，すべての E_a は positive recurrent となる。各 E_a に対して補助定理4(a)を満たす有限集合 K_a をとる．$K=\bigcup_a K_a$ は条件より有限集合となる．再び，$E=K$ を条件式に代入して n で割ることにより，すべての $i \in S$ について $\sum_{n=1}^{N}\{\sum_{j\in E} {}_{E}f_{ij}^{n}\}$

$\geqq c$ を満たす自然数 N と定数 $c>0$ が存在することが導かれる．これより，[5] の定理11.3 を使って示される．□

任意の E_a について，$p^*(i,E)$の E_a 上への制限を $p_a^*(E)$と表す．つまり，$p_a^*(E)=p^*(i,\ E\cap E_a)$．また i から出発して結局 E_aに到達する確率を $\alpha(i,E_a)$と表す． 任意の $i\in T$，$E\subset S$，$n=1,\ 2,\cdots$について，

$$(7)\quad \alpha(i,E_a)=\sum_{j\in E_a}\{\sum_{n=1}^{\infty}{}_Rf_{ij}^n\},\quad p^*(i,E)=\sum_a\alpha(i,E_a)\cdot p_a^*(E)$$

が成立する．

定理(Ⅳ)の証明．任意の $E\subset S$は，(Ⅲ)の証明でやったようにTと各 E_aの部分集合に分割される．条件より，次の各場合に示されれば，その他の場合は明らかである．(a)$i\in E_a$，$E\subset E_a$ (b)$i\in T$，$E\subset E_a$ (c)$i\in T$，$E\subset T$．(a)は補助定理4 で，(c)は補助定理5 で示されている．(b)を示す．各 E_a上で(3)を満たす定数と(6)を満たす定数の最大を改めて B とおく．(7)を使って，

$$|\sum_{k=1}^{n}p^k(i,\ E)-p^*(E)|$$

$$=|\sum_a\sum_{j\in E_a}\{\sum_{k=1}^{n}{}_Rf_{ij}^k(\sum_{m=0}^{n-k}p^m(j,E))\}-n\cdot\sum_a\sum_{j\in E_a}\sum_{k=1}^{\infty}{}_Rf_{ij}^k p_a^*(E)|$$

$$\leqq|\sum_a\sum_{j\in E_a}[\sum_{k=1}^{n}{}_Rf_{ij}^k\{\sum_{m=0}^{n-k}p^m(j,E))-(n-k+1)\cdot p_a^*(E)\}]|$$

$$+|\sum_a\sum_{j\in E_a}\sum_{k=1}^{n}(k-1){}_Rf_{ij}^k p_a^*(E)|+|n\cdot\sum_a\sum_{j\in E_a}\sum_{k=n+1}^{\infty}{}_Rf_{ij}^k p_a^*(E)|$$

を得る．この式の右辺の第 1項の｛｝の中身は，補助定理4 により B で押えられる．よって，第 1項全体も B で押えられる．第 2項目は結局，

$\sum_a \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot p^k(i,T) p_a^*(E)$で押えられる．第 3項目は，$n \cdot p^n(i,T) p_a^*(E)$ に等しい．よって，補助定理5 によりこれらは B で押えられる．□

参 考 文 献

[1] Chung, K. L.(1960). Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Springer Verlag, Berlin.

[2] Dekker, R. and Hordijk, A. (1988). Average, sensitive and Blackwell optimal policies in denumerable Markov decision chains with unbounded rewards. Mathematics of Operations Research. Vol. 13.

[3] Dietz, H. M. and Nollau.(1983). Markov Decision Problems with Countable State Spaces. Band 15, Akademie Verlag, Berlin.

[4] Doob, J.(1953). Stochastic Processes. Wiley, New York.

[5] Hordijk, A.(1974). Dynamic Programming and Markov Potential Theory. Math. Centre Tracts No.51, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[6] Kadota, Y.(1979). Countable state Markovian drcision processes under the Doeblin-conditions. Res. Assoc. Statist. Sci. Vol.19.