数理解析研究所講究録
第 800 巻 1992 年 147-156

Lagrange 的 Strain Tensor の相関時間

名大工 石原　卓 (Takashi ISHIHARA)
名大工 金田行雄 (Yukio KANEDA)

§1. Introduction

流体中の微小線分要素 $\mathbf{l}$ は, 次の式に従って発展する ;

$$\frac{D}{Dt}l_i = W_{ij}l_j. \tag{1.1}$$

ここで $\frac{D}{Dt}$ はラグランジュ微分, $W_{ij} = \partial u_i(\mathbf{X}(t), t)/\partial x_j$, $\mathbf{X}(t)$ は線分要素の位置を表す. $W_{ij} = -\partial u_i/\partial x_j$ とすれば流体中の微小面要素, さらに渦度場や乱流磁場の Stretching も非粘性の場合 (1.1) に従う. それ故 (1.1) に従う場の統計の理解は, これらの現象の理解にも重要である.

(1.1) に従う場の統計量として特に線分要素の長さ ℓ の伸び率 $\gamma_p = \frac{d}{dt} ln < \ell^p >^{1/p}$ に注目した場合, 問題は 2 つの部分に分けることが出きる. 一つは W_{ij} の統計が与えられたとき γ_p はどうなるかという Kinematical な問題であり, もう一つはナビエストークス方程式（NS）から W_{ij} の統計はどう決定されるかという Dynamical な問題である.

例えば NS に従う場のなかでの一粒子拡散の問題の場合, 時刻 t に $\mathbf{x}$ にいた流体粒子の時刻 s における速度を $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t; s)$ とした時, Lagrangian velocity auto-correlation を $R_L(t, s) \equiv < \mathbf{v}(\mathbf{x}, t; s) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t; t) >$ で定義すると, 拡散係数 $\kappa \equiv < \mathbf{X}^2 > /2t$（$\mathbf{X}$ は初期の位置からの変位）は,

$$\kappa = \int_0^t ds R_L(t, s) \ \rightarrow < v^2 > T_L \quad (t \rightarrow \infty) \tag{1.2}$$

となることが知られている. ここで Integral time scale T_L は, 次の式で定義される ;

$$T_L \equiv \frac{1}{< v^2 >} \int_t^\infty ds R_L(t, s). \tag{1.3}$$

この場合は (1.2) の関係式を得ることが Kinematical な問題であり, NS と T_Lを結び付けることが Dynamical な問題である.

さて (1.1) の系の Kinematical な問題に対しては, Drummond 等の近似式 ;

$$\gamma_p \approx \alpha_p \int_0^\infty ds < B_{ij}(s)B_{ij}(0) > \approx \alpha_p \Omega^2 T_B, \tag{1.4}$$

$$\alpha_p = \frac{2}{D+2} + \frac{2p}{D(D+2)},$$

$$\Omega^2 \equiv < B_{ij}(t)B_{ij}(t) >,$$

$$T_B \equiv \int_0^t ds < B_{ij}(t)B_{ij}(s) > /\Omega^2, \tag{1.5}$$

がある.[1)] ここで $B_{ij} = (W_{ij} + W_{ji})/2$ であり, 特性時間 T_Bは, Strain 場を特徴付ける基本的な統計量の一つである.

しかし, 2 次元 Dynamical Simulation においては (1.4) 式の T_Bの代わりに, 線分要素とともに回転する座標系にのってみた Integral time scale T_V;

$$T_V \equiv \int_0^t ds < V_{ij}(t)V_{ij}(s) > /\Omega^2 \tag{1.6}$$

を用いた方が Simulation により測定されるγ_pをよく近似することがわかった.[2)] ここで $\mathbf{V} = \mathbf{R}^T\mathbf{B}\mathbf{R}$ であり, $A_{ij} = (W_{ij} - W_{ji})/2$ としたとき $\mathbf{R}$ の発展方程式は $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{A}\mathbf{R}$ である.

そこで, 本報告ではまず, §2 で場の基本的な統計量である Integral time scale T_Lと T_B の関係を次元解析により明らかにする. 次に§3 では, 上の Kinematical な結果の上にたち, 場の一様性（並進対称性）, 正規性, 等方性（回転対称）の仮定のもとで,（反転対称性は仮定しない, つまりヘリシティーの影響は考慮する.）T_Bと T_Vに対する近似式を NS から導くこと（ Dynamical な解析）を試みる. 最後に, §4 で全体のまとめと議論を行う.

§2. T_L と T_B の関係

§1 で定義された Integral time scale T_L, T_B に対して, Micro time scale τ_L, τ_B を次式で定義する；

$$\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 v_i(\mathbf{x},t;s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} v_i(\mathbf{x},t;t)\right\rangle \equiv -\frac{q^2}{{\tau_L}^2}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{x},t;s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} B_{ij}(\mathbf{x},t;t)\right\rangle \equiv -\frac{\Omega^2}{{\tau_B}^2}. \tag{2.2}$$

ここで左辺は, 各々 $R_L(t,s)$, $< B_{ij}(t)B_{ij}(s) >$ を $s=t$ のまわりにテイラー展開した時の $(s-t)^2$ の係数, そして $q^2 =< u^2 >$ である. $R_L(t,s)$, $< B_{ij}(t)B_{ij}(s) >$ の $(s-t)$ 依存の正規性を仮定すると, (2.1), (2.2) の Micro time scale 等は, τ_L, τ_B をよく近似する.[2)]

(2.1), (2.2) の次元は, それぞれ cm^2/sec^4, $1/sec^4$ であり, これらの次元を密度ρ, 単位質量当たりのエネルギー散逸率ϵ, 動粘性係数νから作ると次式を得る.[3, 4)]

$$\frac{q^2}{{\tau_L}^2} \sim \left(\frac{\epsilon^3}{\nu}\right)^{1/2}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\Omega^2}{{\tau_B}^2} \sim \left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^2. \tag{2.4}$$

(2.3), (2.4) より $\epsilon \sim \nu\Omega^2 \sim q^3/L$ を用いると

$$\frac{\tau_B}{\tau_L} \sim \left(\frac{\nu}{qL}\right)^{1/4} \sim Re^{-1/4} \tag{2.5}$$

となることがわかる. ここで, L は乱流の外的スケール, Re はレイノルズ数である.

また, Eulerian velocity micro time scale τ_E は, 次の式によって定義される.

$$\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x},s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} u_i(\mathbf{x},t)\right\rangle \equiv -\frac{q^2}{{\tau_E}^2}. \tag{2.6}$$

大きい渦と小さい渦の独立性を仮定すると, (2.6) 式左辺の主要な部分は, 次のように見積もれる[3, 4)];

$$\frac{q^2}{{\tau_E}^2} \sim q^2\frac{\epsilon}{\nu}. \tag{2.7}$$

(2.3), (2.7) より Eulerian 及び Lagrangian velocity time micro scale の間には, 次の関係があることがわかる.

$$\frac{\tau_E}{\tau_L} \sim \left(\frac{\nu}{qL}\right)^{1/4} \sim Re^{-1/4}. \tag{2.8}$$

(2.5), (2.8) から Lagrangian strain tensor time micro scale は, Eulerian velocity time micro scale と同じレイノルズ数依存性をもつことがわかる.

§3. T_B, T_V の見積もり

この節では, §1 で定義された Integral time scale T_B, T_V に対して, 次式により定義される Time micro scale τ_B, τ_V;

$$\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{x},t;s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} B_{ij}(\mathbf{x},t;t)\right\rangle \equiv -\frac{\Omega^2}{{\tau_B}^2}, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 V_{ij}(\mathbf{x},t;s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} V_{ij}(\mathbf{x},t;t)\right\rangle \equiv -\frac{\Omega^2}{{\tau_V}^2} \tag{3.2}$$

等を (NS) から解析的に見積もることを試みる. 上式から計算される Time micro scale が Integral time scale のよい近似になるかどうかは自明ではない. しかし 2 次元 Dynamical Simulation において, 比較的良い近似になっていることがわかったため,[2)] 3 次元においても Integral time scale の一応の目安として計算する価値があると考えられる.

そこでまず (NS) を後の便宜のため, 次の形に書き表す.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \nu\triangle\mathbf{u}\\ &= M : \mathbf{uu} + \nu\triangle\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで

$$2M : \mathbf{ab} \equiv -(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + 2N : \mathbf{ab},$$

$$N : \mathbf{ab} \equiv \nabla\nabla^{-2}\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\frac{\partial b_k}{\partial x_j}.$$

$g = \nabla^{-2} f$ は, $\triangle g = f$の解を表し, 圧力 p は $-\nabla p = N : \mathbf{uu}$ によって与えられる. また, ラグランジュ的であることは, 次の Lagrangian position function によって達成される;

$$\psi(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t) \equiv \delta^D(\mathbf{y} - \mathbf{r}(\mathbf{x}, t; s)). \tag{3.4}$$

ここでδ^Dは, D 次元のディラックのδ関数, $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t; s)$ は, 時刻 t に場所 $\mathbf{x}$ にいた流体粒子の時刻 s における場所を表す位置ベクトルである. ψの発展方程式は,

$$\{\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}]\}\psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0, \tag{3.5a}$$

$$\psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t) = \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3.5b}$$

これらを用いることによって速度勾配のテンソル $W_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ のラグランジュ的時間微分等は, 次のように計算される.

$$W_{ij}(\mathbf{x}, t; s) = \int_V \psi(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t) \frac{\partial u_i(\mathbf{y}, s)}{\partial y_j} d^D \mathbf{y}, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} W_{ij}(\mathbf{x}, t; s) &= \int_V \{[\frac{\partial}{\partial s}\psi(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t)] \frac{\partial u_i(\mathbf{y}, s)}{\partial y_j} + \psi(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t)[\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{u_i(\mathbf{y}, s)}{\partial s}]\} d^D \mathbf{y} \\ &= \int_V \psi(\mathbf{y}, s; \mathbf{x}, t)\{\frac{\partial u_i(\mathbf{y}, s)}{\partial y_k}\frac{\partial u_k(\mathbf{y}, s)}{\partial y_j} - \frac{\partial^2 p(\mathbf{y}, s)}{\partial y_j \partial y_j} + \nu\Delta\frac{\partial u_j(\mathbf{y}, s)}{\partial y_i}\} d^D \mathbf{y}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで積分は, 流体の占める全領域で実行するものとする. そして$\psi(\mathbf{y}, t; \mathbf{x}, t) = \delta^D(\mathbf{y} - \mathbf{x})$であることを利用すると次の式等を得る.

$$W_{ij}(\mathbf{x}, t; t) = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}, \tag{3.8}$$

$$(\dot{W})_{ij}(\mathbf{x}, t; t) = -u_{i,k}(\mathbf{x}, t) u_{k,j}(\mathbf{x}, t) - p_{,ij}(\mathbf{x}, t) + \nu\Delta u_{i,j}(\mathbf{x}, t). \tag{3.9}$$

同様な計算の後,

$$(\ddot{W})_{ij}(\mathbf{x}, t; t) = (\ddot{W}_N)_{ij} + (\ddot{W}_\nu)_{ij} \tag{3.10}$$

を得る．ここで

$$(\ddot{W}_N)_{ij} = - u_a(u_{b,j}u_{i,b})_{,a} - [(M:\mathbf{uu})_{k,j}u_{i,k} + (M:\mathbf{uu})_{i,k}u_{k,j}] + u_a(N:\mathbf{uu})_{i,ja} + 2[N:\mathbf{u}(M:\mathbf{uu})]_{i,j}, \tag{3.11a}$$

$$(\ddot{W}_\nu)_{ij} = \nu\{u_k\Delta u_{i,kj} - [\Delta u_{k,j}u_{i,k} + u_{k,j}\Delta u_{i,k}] + 2[N:\mathbf{u}(\Delta\mathbf{u})]_{i,j} + \Delta(M:\mathbf{uu})_{i,j} + \nu\Delta^2 u_{i,j}\}. \tag{3.11b}$$

以上により，(3.1) 及び (3.2) の左辺をオイラー的な場の量で記述することが可能となった．

3.1 τ_B の計算

(3.1) の左辺 ($\equiv B_2$) は，(3.8)-(3.11) を使って次のように計算される．

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{x},t;s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} B_{ij}(\mathbf{x},t;t)\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left\langle \ddot{W}_{ij}(W_{ij}+W_{ji})\right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(B_{20}+\nu B_{21}+\nu^2 B_{22}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで，

$$\begin{aligned} B_{20} &= a+b+c+d+e, \\ a &= - < u_a(u_{b,j}u_{i,b})_{,a}(u_{j,i}+\underline{u_{i,j}}) >, \\ b &= \ < u_a(N:\mathbf{uu})_{i,ja}(u_{j,i}+u_{i,j}) >, \\ c &= - < (M:\mathbf{uu})_{a,j}u_{i,a}(u_{j,i}+\underline{u_{i,j}}) >, \\ d &= - < (M:\mathbf{uu})_{i,a}u_{a,j}(u_{j,i}+\underline{u_{i,j}}) >, \\ e &= \ < 2[N:\mathbf{u}(M:\mathbf{uu})]_{i,j}(\underline{u_{j,i}}+\underline{u_{i,j}}) >, \\ \nu^2 B_{22} &= \nu^2 < \Delta^2 u_{i,j}(u_{j,i}+\underline{u_{i,j}}) > \end{aligned}$$

である．上式中の下線部の項及び B_{21} は，場の一様性，正規性及び非圧縮条件により零になる．残りの項は，

$$< u_i(\mathbf{x},t)u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r},t) >= \int d^D\mathbf{k}Q_{ij}(\mathbf{k},t)exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

で定義される $Q_{ij}(\mathbf{k},t)$ により次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} a = & \int d^D\mathbf{q}q_a q_b q_j Q_{ii}(-\mathbf{q})\int d^D\mathbf{k}k_j Q_{ab}(\mathbf{k}) \\ & + \int d^D\mathbf{q}q_a q_j^2 Q_{bi}(-\mathbf{q})\int d^D\mathbf{k}k_b Q_{ai}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$b = -2\int d^D\mathbf{q}q_a q_\alpha Q_{\beta j}(\mathbf{q})\int d^D\mathbf{p}p_j p_\beta Q_{a\alpha}(-\mathbf{p}), \quad (3.13b)$$

$$c = (-2i)\iint_\Delta d^D\mathbf{p}d^D\mathbf{q}M_{abc}(\mathbf{k})k_j p_a q_j Q_{bi}(-\mathbf{p})Q_{ci}(-\mathbf{q}), \quad (3.13c)$$

$$d = (-2i)\iint_\Delta d^D\mathbf{p}d^D\mathbf{q}M_{abc}(\mathbf{k})p_j q_i q_j Q_{ib}(\mathbf{p})Q_{ca}(-\mathbf{q}), \quad (3.13d)$$

$$\nu^2 B_{22} = \nu^2\int d^D\mathbf{k}k^6 Q_{ii}(\mathbf{p}). \quad (3.13n)$$

ここで，

$$M_{abc}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2}\{k_b P_{ac}(\mathbf{k}) + k_c P_{ab}(\mathbf{k})\},$$

$$P_{ab}(\mathbf{k}) = \delta_{ab} - k_a k_b/k^2, \qquad N_{abc}(\mathbf{k}) = ik_a k_b k_c/k^2$$

であり，積分 $\iint_\Delta$ は $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{k}=0$ を満たす $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ 空間全領域にわたって行うものとする．さらに，等方性（回転対称）を仮定すると $Q_{ij}(\mathbf{k})$ は，

$$Q_{ij}(\mathbf{k}) = D_{ij}(\mathbf{k})Q(k) + \epsilon_{ij\alpha}k_\alpha\chi(k),$$

$$D_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

となり，(3.13) の項は，それぞれつぎのようになる；

$$a = \frac{2}{3}\int_0^\infty k^2\chi(k)4\pi k^2 dk\int_0^\infty k^4\chi(k)4\pi k^2 dk, \quad (3.14a)$$

$$b = -\frac{16}{15}\left\{\int_0^\infty 4\pi k^4 Q(k)dk\right\}^2 = -\frac{16}{15}\Omega^4, \tag{3.14b}$$

$$\begin{aligned} c =& 2\iint_\Delta d^D\mathbf{p}d^D\mathbf{q}\, k^2pqyz(1-z^2-y^2-xyz)Q(p)Q(q) \\ & -2\iint_\Delta d^D\mathbf{p}d^D\mathbf{q}k^2p^2q^2(xyz+z^2y^2)\chi(p)\chi(q), \end{aligned} \tag{3.14c}$$

$$d = 2\iint_\Delta d^D\mathbf{p}d^D\mathbf{q}\, k^2pqx(1-z^2)(1-y^2)Q(p)Q(q), \tag{3.14d}$$

$$\nu^2 B_{22} = \nu^2\int_0^\infty 4\pi k^8 Q(k)dk. \tag{3.14n}$$

ここで，x, y, zは，k, p, qで作られる三角形の各辺に向かい合う角度の余弦である．エネルギースペクトル $Q(k)$ を与えて (3.14) の積分を実行すれば (3.12) の B_2が定まり，(3.1) を用いてτ_Bを計算することができる．

3.2 τ_Vの計算

(3.2) の左辺 ($\equiv V_2$) は，§1 で定義された R_{ij}による項が B_2に付け加わった，次のような形になる；

$$V_2 = B_2 + 2 < \mathrm{Tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{AB})^2 > +4 < \mathrm{Tr}\mathbf{A}\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}} > . \tag{3.15}$$

3.1と同様な計算の後，付加項は，

$$2 < \mathrm{Tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{AB})^2 >= -\left\{\int_0^\infty 4\pi k^4 Q(k)dk\right\}^2 = -\Omega^4, \tag{3.16}$$

$$4 < \mathrm{Tr}\mathbf{A}\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}} >= c - d \tag{3.17}$$

となることがわかる．

最後に，Time micro scale の定量的な評価を行う．(3.14) の式に慣性領域のエネルギースペクトル形 $E(k) \equiv 2\pi k^2 Q(k) \propto k^{-5/3}$ を代入すると，積分は高波数で発散する．すなわちτ_B, τ_V の評価においては，エネルギー散逸領域が重要である．そこでここでは，Lagrangian Renormalized Approximation [4]より得られた普遍平衡領域のエネル

ギースペクトルを用いる. $\Omega^2 = \epsilon/\nu$と規格化したとき, (3.14) の各積分は, helicity の影響を無視したとき, $a = 0.0$, $b = -16/15(\epsilon/\nu)^2$, $c = -0.200(\epsilon/\nu)^2$, $d = 0.064(\epsilon/\nu)^2$, $\nu^2 B_{22} = 0.205(\epsilon/\nu)^2$となった. (3.1), (3.2) 及び (3.12), (3.15) を用いると,

$$\tau_B = 2.01(\nu/\epsilon)^{(1/2)}, \tag{3.20}$$

$$\tau_V = 1.07(\nu/\epsilon)^{(1/2)} \tag{3.21}$$

となる.

§4. まとめと議論

以上をまとめると,

§2 の次元解析の結果, 乱流中の線分要素の伸び率γ_pを特徴付ける Lagrangian strain tensor time micro scaleτ_Bと一粒子拡散の拡散係数κを特徴付ける Lagrangian velocity time micro scale τ_L の比は, レイノルズ数 Re を大きくしていったとき,

$$\frac{\tau_B}{\tau_L} \sim \left(\frac{\nu}{qL}\right)^{1/4} \sim Re^{-1/4}$$

のようにレイノルズ数の -1/4 乗に比例するつまり τ_L の方が大きいことがわかった.

§3 の解析計算の結果, $\tau_B = 2.01(\nu/\epsilon)^{(1/2)}$, $\tau_V = 1.07(\nu/\epsilon)^{(1/2)}$ のように, $\tau_{\hat{L}_B}$と$\tau_{\hat{L}_B}$の間には, 約 2 倍の違いがあることがわかった. これは, 2 次元の場合と同様である. 線分要素の伸び率γ_pに対して, 近似式 (1.4) 及びその式中のτ_Bをτ_Vに置き換えたものが, 3 次元 Dynamical Simulation においてどれだけ有効かは, まだわからないが, 上の結果はγ_pの定量的な予測として役立つと思われる.

ヘリシティーの効果は, (3.15a) 及び (3.15c) 右辺第 2 式に現れる. ヘリシティースペクトルχが与えられれば、それによってτ_B, τ_Vへのヘリシティーの影響を見積もることができる。

渦度に対して, (3.1) の左辺に相当する

$$A_2 \equiv \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{x},t;s)}{\partial s^2}\right|_{s=t} A_{ij}(\mathbf{x},t;t)\right\rangle$$

を計算しみると,

$$\begin{aligned} A_2 =& \frac{1}{4}\left\langle \ddot{W}_{ij}(W_{ij}-W_{ji})\right\rangle \\ =& B_2 - \frac{1}{4}b. \end{aligned}$$

となり, その評価は, $A_2 = 0.017(\epsilon/\nu)^2$ であった. これは、$B_2 = -0.246(\epsilon/\nu)^2$, $V_2 = -0.873(\epsilon/\nu)^2$ 等と比べて非常に小さく、$< A_{ij}(t,s)A_{ij}(t,t) >$の$\tau = s - t$ についての減衰が$\tau << 1$ では Bや Vのそれに比べて非常に遅いことを意味しており、この結果は, 速度勾配のテンソル W_{ij} の対称部分と反対称部分が本質的に違う統計的性質を持っていることを示唆していると考えられる.

References

1)I.T.Drummond and W.Münch:J.Fluid Mech.**215**(1990)45.

2)T.Ishihara and Y.Kaneda:Submitted.

3)H.Tenekes:J.F.Mech.**67**,(1975)561.

4)Y.Kaneda:To be submitted.