

点に容量を持つ無向ネットワークのフロー飽和実現について

On Realization of Flow-Saturation  
in an Undirected Vertex Capacitated Network

早稲田大学 金子美博 (Yoshihiro KANEKO)  
中央大学 篠田庄司 (Shoji SHINODA)  
早稲田大学 堀内和夫 (Kazuo HORIUCHI)

1. まえがき

本報告では, 点が有限容量を持ち, 枝が無限容量を持つ無向なネットワークに対する, 最小本数の枝付加によるフロー飽和実現という問題を提起する. 考察の結果, そのようなフロー飽和実現のためには, 定義する真極大点の点対に限って枝を付加することを, 考えれば十分であることを示すと共に, フロー飽和実現のために必要な枝の最小本数  $Q$  は, ネットワーク上の真極大点の個数  $h$  を用いて,  $1 \leq Q \leq h-1$  であることも示す. 尚, 命題の中には, 証明を紙面の都合上省いたものもあり, これについては, 別の機会に譲る.

2. 準備

考察の対象とするネットワーク  $N$  は, 各点に正の有限容量, 各枝に正の無限容量の重みを持ち,  $N=(V(N), E(N), C)$  で表され,  $V(N)$  及び  $E(N)$  は, それぞれ  $N$  の点集合及び枝集合を表す.  $N$  は無向連結で自己閉路も多重枝も含まない単純グラフの構造とする.  $C$  は  $V(N)$  上で定義され, 正の有限な実数値をとる関数であり, 点  $v$  の容量は  $C(v)$  で表される. 以下単にネットワークと言え, 点に有限容量, 枝に無限容量の重みを持つ無向ネットワークを指し, 枝と言え, 容量が無限大の無向枝を指すものとする. ネットワーク  $N$  が無向であるため, 点対は全て非順序点対である. 点集合  $U$  に対して,  $U$  の容量  $C(U)$  は,  $U$  に属する全ての点の容量の総和を表す.  $N$  上の点集合  $U$  に対して,  $N-U$  は,  $U$  に属する全ての点を  $N$  から除去したネットワークを表す.  $N$  上の点対集合  $A$  に対して,  $N+A$  は,  $A$  上の全ての点対に枝を付加したネットワークを指す.  $N$  上の  $x$ - $y$  点カットセットとは,  $N-K$  において, 点  $x$  と点  $y$  とが異なる連結成分に属するような点集合  $K$  である.  $N$  上の  $x$ - $y$  点カットセットで, 容量が最小となるものの値を  $s_N(x, y)$  <sup>(1)</sup> で表す. 但し  $x$  と  $y$  が隣接するならば,  $s_N(x, y) = \infty$  とする.  $N$  上の 2 点間の最大フロー値を次のように定義し, その値を基に,  $N$  における飽和点対及び不飽和点対を定義する.

[定義 1] ネットワーク  $N$  上の 2 点  $x, y$  間の最大フロー値  $f_N$  を

$$f_N(x, y) = \min \{C(x), s_N(x, y), C(y)\} \quad (x \neq y) \quad (1)$$

$$f_N(x, y) = \infty \quad (x = y) \quad (2)$$

とする.  $N$  上のある点  $x$  に対して,

$$f_N(x, y) < \min \{C(x), C(y)\} \quad (3)$$

となる点  $y$  が  $N$  上に存在するならば,  $N$  において点  $x$  は不飽和点であると呼び,  $N$  上の不飽和点の集合を  $U(N)$  で表す. 式 (3) を満たす点対  $(x, y)$  を  $N$  上の不飽和点対と呼び, その集合を  $UV(N)$  で表す.  $x$  以外の任意の点  $y$  に対して,

$$f_N(x, y) = \min \{C(x), C(y)\} \quad (4)$$

が成り立つならば, 点  $x$  を  $N$  上の飽和点と呼び, 式 (4) を満足する点対  $(x, y)$  を,  $N$  上の飽和点対と呼ぶ.  $N$  における飽和点及び飽和点対の集合をそれぞれ  $S(N)$  及び  $SV(N)$  で表す.  $\square$

飽和点対及び不飽和点対を用いて,  $\Gamma$ -飽和実現を定義する.

[定義 2] 不飽和点が存在するネットワークを  $\Gamma$ -不飽和なネットワークと呼び, そうでないネットワークを  $\Gamma$ -飽和なネットワークと呼ぶ.  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク上の何組かの点対に, 枝を付加して,  $\Gamma$ -飽和なネットワークに変化させることを  $\Gamma$ -飽和実現と呼ぶ.  $\square$

本報告では, 与えられた  $\Gamma$ -不飽和なネットワークに対して, 最小本数の枝を付加して,  $\Gamma$ -飽和を実現する問題を考える. この問題は, 既に知られているグラフの辺 (本報告では, 枝と呼んでいる) 付加問題の一種である.

[辺付加問題]<sup>(2), (3)</sup> 初期グラフ  $G_0 = (V_0, E_0)$  とコスト関数  $c: V_0 \times V_0 \rightarrow Z^+$  (非負整数) が与えられているとき, グラフ  $G = G_0 + A$  が, 性質  $\pi$  (グラフに関する一つの性質で, 単調性を有するもの) を満たし, コスト総和  $c(A)$  が最小となる辺集合  $A$  を求めよ.  $\square$

$\Gamma$ -飽和実現の問題において, (1)  $\Gamma$ -飽和なネットワークに対して, どのように枝を付加しても,  $\Gamma$ -飽和のままであること, 及び (2) 任意の  $\Gamma$ -不飽和なネットワークに対して, グラフ構造が完全グラフとなるように枝を付加すれば,  $\Gamma$ -飽和が実現できること, が辺付加問題としての, 性質  $\pi$  に相当する.

ネットワーク上の不飽和点に対して, 極大点を以下のように定義する.

[定義 3]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク  $N$  上の不飽和点の集合  $U(N)$  において, ある不飽和点  $\alpha$  が, (I)  $\alpha$  以外の  $U(N)$  上の任意の点  $\beta$  に対して,  $(\alpha, \beta) \in UV(N)$  であるか, または, (II)  $\alpha$  以外の  $U(N)$  上の点  $\beta$  で,  $(\alpha, \beta) \in SV(N)$  を満たすもの全てに対して,  $f_N(\alpha, \beta) = C(\beta)$  であるならば,  $N$  において  $\alpha$  は極大(である)点と呼ばれる.  $N$  上の極大点及び極大点の点対の集合をそれぞれ  $P(N)$  及び  $PV(N)$  で表す.  $\square$

ネットワーク  $N$  上の極大点の点対は必ずしも不飽和点対になるとは限らない. 次の補題は,  $N$  上で飽和点対である 2 個の極大点の性質を示すものである.

[補題 1]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク  $N$  上の相異なる 2 つの極大点  $\alpha_0, \beta_0$  に対して,

$(\alpha_p, \beta_p) \in SV(N)$ ならば、 $C(\alpha_p) = C(\beta_p)$ である。□

[定義4]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ 上の極大点の点対の集合 $PV(N)$ に対して、 $PV(N) \cap SV(N) \neq \emptyset$ ならば、 $P(N)$ の部分集合 $\tilde{P}(N)$ が、任意の $\alpha' \in P(N) \setminus \tilde{P}(N)$ に対して、 $(\alpha', \alpha) \in SV(N)$ なる $\alpha$ を要素として持っている、極小な極大点の集合ならば、 $\tilde{P}(N)$ を真極大点集合と呼び、 $\tilde{P}(N)$ 上の点を真極大点と呼ぶ。また、 $PV(N) \cap SV(N) = \emptyset$ ならば、 $P(N)$ 自身が真極大点集合であり、 $P(N)$ 上の任意の点が真極大点であると呼ばれる。 $N$ 上の真極大点の点対の集合を $\tilde{P}(N)$ で表す。□

補題1を用いて次の命題が成り立つことが証明できる。

[命題1]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ 上の不飽和点対の集合 $UV(N)$ と真極大点の点対集合 $\tilde{P}(N)$ に対して、 $UV(N) \supseteq \tilde{P}(N)$ である。□

### 3. 枝付加と $\Gamma$ -飽和実現

ここでは、ネットワーク $N$ 上の点対集合 $A$ による影響点対集合を定義し、最小本数の枝付加と $\Gamma$ -飽和実現について考える。

[定義5]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ 上の点対集合 $A$ に対して、 $N$ における $A$ による影響点対集合とは、 $N+A$ 上で飽和点対となる $N$ 上の不飽和点対の集合であり、 $I(N:A)$ で表す。即ち、 $I(N:A) = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in UV(N), (\alpha, \beta) \in SV(N+A)\}$ である。 $A$ が唯1個の点対 $(x, y)$ からなるとき、簡単のため、 $I(N:x, y)$ で表す。□

$\Gamma$ -飽和実現の問題とは、与えられた $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ に対して、 $I(N:A) = UV(N)$ となる $N$ 上の点対集合 $A$ を求める問題であると言える。影響点対集合に関して、以下の命題が成り立つことが証明できた。

[補題2]<sup>(6)</sup>  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ 上の任意の点対 $(x, y)$ に対して、 $I(N:x, y) \subseteq I(N:\alpha, \beta) \subseteq I(N:\alpha_p, \beta_p)$ を満たす不飽和点対 $(\alpha, \beta)$ 及び2個の真極大点 $\alpha_p$ 及び $\beta_p$ が $N$ 上に存在する。□

[補題3]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ 及び $N$ 上の点対集合 $A$ に対して、 $(\alpha, \beta) \in UV(N+A)$ ならば、 $(\alpha, \beta) \in UV(N)$ であり、 $\alpha_p \in \tilde{P}(N+A)$ ならば、 $\alpha_p \in \tilde{P}(N)$ である。□

[命題2]<sup>(6)</sup>  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N$ に対して、 $N+A$ が $\Gamma$ -飽和である $m$ 組の点対の集合 $A$ が $N$ 上に存在するならば、 $N+A_p$ が $\Gamma$ -飽和となる $m$ 組の真極大点の点対の集合 $A_p$ が $N$ 上に必ず存在する。

(証明) 題意を満たす $N$ 上の点対の集合を $A = \{(x_j, y_j) \mid j=1, 2, \dots, m\}$ とする。ここで、 $m-1$ 個の点対の集合 $A_{m-1} = A \setminus \{(x_1, y_1)\}$ を考える。

(I)  $N+A_{m-1}$ が $\Gamma$ -飽和ならば、 $\tilde{P}(N)$ における任意の真極大点 $\alpha_p$ 及び $\beta_p$ に対し

て,  $A_{m-1} + \{(\alpha_p, \beta_p)\}$  は  $\Gamma$ -飽和である.

(II)  $N + A_{m-1}$  が  $\Gamma$ -不飽和ならば, 補題 2 より  $I(N + A_{m-1}; x, y) \subseteq I(N + A_{m-1}; \alpha_p, \beta_p)$  を満たす真極大点  $\alpha_p$  及び  $\beta_p$  が  $N + A_{m-1}$  上に存在する. 補題 3 より,  $\alpha_p$  及び  $\beta_p$  は  $N$  上でも真極大点である. よって, (I), (II) のどちらの場合も  $N + \{A \setminus \{(x_1, y_1)\}\} \cup \{(\alpha_p, \beta_p)\}$  は,  $\Gamma$ -飽和であり,  $\{A \setminus \{(x_1, y_1)\}\} \cup \{(\alpha_p, \beta_p)\}$  は  $N$  上の真極大点の点对を少なくとも 1 組持つ点对集合である.

以上の操作を高々  $m$  回繰り返せば,  $N + A_p$  が  $\Gamma$ -飽和となる  $m$  組の真極大点の点对の集合  $A_p$  が  $N$  上に存在することが示される.  $\square$

この命題より,  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク  $N$  の  $\Gamma$ -飽和実現は, 枝を付加すべき点对を,  $N$  上の真極大点の点对に限って考えれば十分であることがわかる.

#### 4. 最小数枝付加による $\Gamma$ -飽和実現の方法

前節の命題 2 を基に, 一つの随伴グラフを定義し, 最小本数の枝付加で  $\Gamma$ -飽和実現を考え, そのような枝を付加すべき点对を求めるアルゴリズムを提案する.

[定義 6] ネットワーク  $N$  上の真極大点の点对集合  $\tilde{P}(N)$  に対する, 不飽和に関する随伴グラフ  $G(\tilde{P}(N))$  とは,  $\tilde{P}(N)$  上の点对を枝とする枝セクショングラフである.  $\square$

命題 1 より, この随伴グラフは完全グラフの構造になる.

[命題 3]  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク  $N$  上の真極大点の集合  $\tilde{P}(N)$  及び  $C(v_n) = \max\{C(v) \mid v \in \tilde{P}(N)\}$  である真極大点  $v_n \in \tilde{P}(N)$  に対して,  $|\tilde{P}(N)| - 1$  個の点对  $(v_n, v) (\in \tilde{P}(N))$  に枝を付加したネットワークは,  $\Gamma$ -飽和である.  $\square$

[命題 4]  $\Gamma$ -飽和実現のために必要な付加枝の最小本数  $l$  は, 完全グラフ構造である随伴グラフ  $G(\tilde{P}(N))$  上の点数  $h$  を用いて,  $1 \leq l \leq h - 1$  になる.  $\square$

以上を基に,  $\Gamma$ -飽和実現において, 付加すべき枝が最小本数となる点对を求める, 簡単なアルゴリズムを以下で述べる.

アルゴリズム

step1  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク  $N$  に対して, 不飽和点对  $UV(N)$  を求め,  $UV(N)$  から, 極大点の集合  $P(N)$  を求める. 更に,  $P(N)$  から真極大点の集合  $\tilde{P}(N)$  を決めて, 不飽和に関する随伴グラフ  $G(\tilde{P}(N))$  を作る.

step2  $i \leftarrow 1$ .

step3  $i = |\tilde{P}(N)| - 1$  ならば,  $V(N)$  上で容量が最も大きな点である  $v_n$  に対して,  $|\tilde{P}(N)| - 1$  個の点对  $(v_n, v) (\in \tilde{P}(N))$  を output し, 終了.

step4  $G(\tilde{P}V(N))$ 上の $i$ 組の真極大点の点对の集合を $E(i)$ とし, $G(N)$ 上の全ての $E(i)$ に対して, $I(N:E(i))$ を調べる. $I(N:E(i))=UV(N)$ となる $E(i)$ が存在すれば, $E(i)$ をoutputし,終了.全ての $E(i)$ に対して, $I(N:E(i))\subset UV(N)$ ならば, $i\leftarrow i+1$ として,step3へ.□

## 5. 数値例

図1の $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N_a$ に対応する,不飽和に関する随伴グラフは図2のようになる.図1における数値は,各点及び各枝の容量を表す. $N_a$ に対して,1本の枝付加で $\Gamma$ -飽和は実現できないが,2本の枝付加では,例えば, $I(N_a:\{(v_1, v_3), (v_1, v_4)\}) = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$ のように, $\Gamma$ -飽和が実現できる.このネットワークは,命題4において, $l = h-1$ の例である.

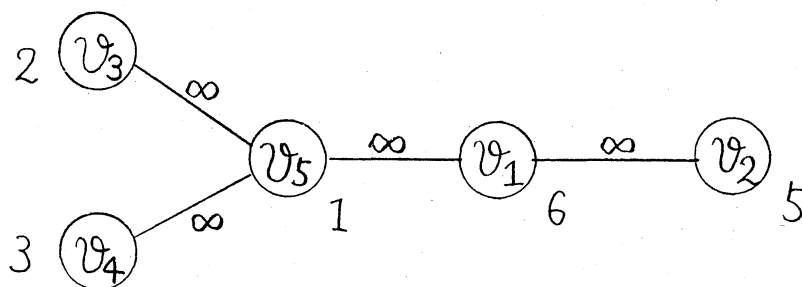


図1  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N_a$

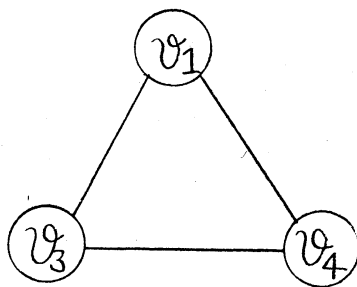


図2  $N_a$ に対する,不飽和に関する随伴グラフ

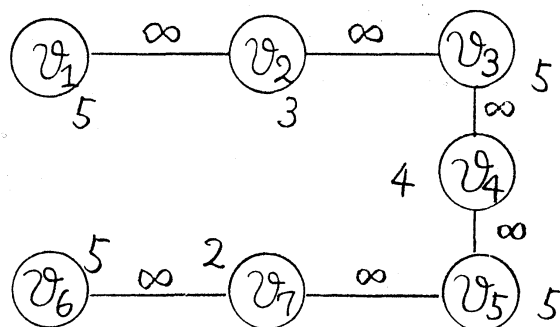


図3  $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N_b$

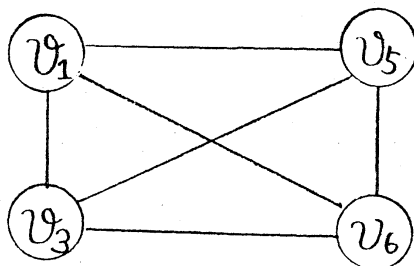


図4  $N_b$ に対する,不飽和に関する随伴グラフ

また図3の $\Gamma$ -不飽和なネットワーク $N_b$ において, $UV(N_b)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ であり,その中で極大点の集合は $\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ であり,これが真極大点の集合でもある.不飽和に関する随伴グラフは図4のようになり, $N_b+\{(v_1, v_6)\}$ が $\Gamma$ -飽和になることが簡単な計算によって確かめられる.この例は,命題4において, $q=1$ の場合である.

## 6.まとめ

本報告では,点に有限な容量が重みづけされた無向なネットワークの, $\Gamma$ -飽和実現という問題を提起し,最小本数の枝を付加して $\Gamma$ -飽和を実現するためには,定義した真極大点の点对への枝付加を考えれば十分であることを示した.また,定義した随伴グラフを用いて, $\Gamma$ -飽和実現のために,最小本数の枝を付加すべき点对を,決定する一つのアルゴリズムを提案した.今後の課題として,本報告の問題がNP完全問題になるかどうかを調べるのが興味ある問題である.

## 文献

- (1)竹内,守島,“ネットワークの2点を分離する最小点カットを用いた中心度関数”,信学論(A),J70-A,4,pp.625-633(1987.4)
- (2)K. P. Eswaran & R. E. Tarjan,“Augmentation problems”,SIAM J. Comput.,5,653-665(1976)
- (3)渡辺,東,中村,“耐故障ネットワークと辺付加問題”,京都大学数理解析研究所講究録,695(計算アルゴリズムと計算量の基礎理論),215-224(1989.6)
- (4)渡辺,東,中村,“グラフの辺付加問題による耐故障ネットワークの構成”,信学論(A),J73-A,7,1242-1254(1990.7)
- (5)伊理,白川,梶谷,篠田ほか:演習グラフ理論-基礎と応用-,コロナ社(1983)
- (6)Kaneko, Shinoda, Horiuchi “On a Realization of Flow-Saturation by Adding Edges in an Undirected Vertex-Capacitated Network”, IEICE, Trans. E (投稿中)