数理解析研究所講究録
第 803 巻 1992 年 176-183

正規交叉型多様体と Calabi-Yau 多様体

並河 良典

§1. 序

非特異ケーラー多様体 X が、$K_X \simeq \mathcal{O}_X$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たす時、Calabi-Yau 多様体と呼ぶことにする。

$\dim X = 2$ の場合、X は、K3 曲面に他ならず、任意の 2 つの K3 曲面は、変形によってつながる事、Torelli 型の定理が成立することなどが知られている。高次元の場合には、これらについてよくわかっていない。小論では、正規交叉型多様体が smooth な多様体に変形される為の充分条件を与える。最初の正規交叉型多様体に適当な（コホモロジーの）条件を課すと、smoothing によってできた多様体は、Calabi-Yau 多様体になる。この構成法（正規交叉型多様体から Calabi-Yau 多様体をつくる）によって、次の問題を考えていこうと言うのが、当研究の動機である。

問題：$\dim X \geqq 3$ とする。このとき Calabi-Yau 多様体の deformation type は有限か？

Euler 数、各 Betti 数は有界か？

§2. 結果

定義 (2.1)

Xを複素解析空間とする。今、X上に有限個の直線束 L_i $(1 \leq i \leq n)$ と、$\mathcal{O}_X$-homomorphism: $s_i : L_i \to \mathcal{O}_X$ が与えられたとする。この時 $(L_i, s_i)_{1 \leq i \leq n}$ をX上の logarithmic structure（以後 log. str. と略称する。）と呼ぶ。

定義 (2.2)

$(X, (L_i, s_i)_{1 \leq i \leq n})$、$(Y, (M_j, t_j)_{1 \leq j \leq m})$ を log. str 付き複素解析空間とする。今、次のデータが与えられたとする。

(1) $f : X \longrightarrow Y$ 複素解析空間としての射

(2) nm個の非負整数 $(e_{ji})_{1 \leq j \leq m,\, 1 \leq i \leq n}$

(3) 次の可換図式を満たす同型 ϕ_j $(1 \leq j \leq m)$.

$$\begin{array}{ccc} f^* M_j & \xrightarrow[\phi_j]{\sim} & L_1^{\otimes e_{j1}} \otimes \cdots \otimes L_n^{\otimes e_{jn}} \\ \big\downarrow {\scriptstyle t_j \otimes 1} & & \big\downarrow {\scriptstyle s_1^{e_{j1}} \cdots s_n^{e_{jn}}} \\ \mathcal{O}_X & \underset{id}{=\!=} & \mathcal{O}_X \end{array} \qquad 1 \leq j \leq m$$

この時 (1), (2), (3) のデータのことを $(X, (L_i, s_i)_{1 \leq i \leq n})$ から $(Y, (M_j, t_j)_{1 \leq j \leq m})$ への射と呼ぶ。

コンパクト複素解析空間Xが、d次元正規交叉型多様体(略して N.C. variety)であるとは、次の事を言う。

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad \text{と既約成分に分解した時,}$$

(1) 各X_iは、smooth である。

(2) Xの各点Pに対して、局所環$\mathcal{O}_{X,P}$は、

$$\mathbb{C}\{z_0, \cdots, z_d\} / z_0 \cdots z_l \quad (0 \leq l \leq d) \text{ と同型.}$$

ここで lは、Pに依存する整数。

注意:

正規交叉型多様体という言葉は、もう少し弱い意味で使われ、ここでの正規交叉型多様体のことを単純正規交叉型多様体と呼ぶこともある。

Xを N.C. variety とする。この時、Xが d-semi-stable とは次の時を言う。

$$I_{X_1}/I_{X_1}I_D \underset{\mathcal{O}_D}{\otimes} \cdots \otimes I_{X_n}/I_{X_n}I_D \simeq \mathcal{O}_D$$

ここで、Dは、Xの singular locus (XのJacobian ideal I_Dで定義されたXの部分解析空間)、I_{X_i}は、X_iのXにおける定義イデアルを表わす。

Xが d-semi-stable であることは、Xが semi-stable fibration $\mathcal{X} \to \Delta$ の central fibre として得られる為の必要条件である。今、ここでXが $\mathcal{X} \to \Delta$ の central fibre になっていると

仮定すると，Xには，次の様にして，log. str が入る。

$$L_i \underset{\text{def}}{:=} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-X_i)|_X$$

$$s_i \underset{\text{def}}{:=} \delta_i|_X \quad \text{ただし} \quad \delta_i : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-X_i) \underset{\text{自然な injection}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$$

これに見習って，一般の d-semi-stable N.C. variety Xにも log. str. を入れることができる。まず，$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ として，各iに対して，直線束 L_i と $\mathcal{O}_X$-homomorphism s_i を構成する。$i=1$の時，(L_1, s_1)を次の様に構成する。$i \geqq 2$の場合も全く同様。

$$X^{(1)} = \bigcup_{i=2}^{n} X_i \quad \text{と置いて，}$$

$X^{(1)}$上では，$\quad I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{(1)}}$

X_1上では，$\quad \mathcal{O}_{X_1}(D_1) \quad ; \quad D_1 = X^{(1)} \cap X_1$

となる様に L_1を構成する。実際

$$\mathcal{O}_{X_1}(D_1)|_{D_1} \cong \left(I_{X_2} \otimes \cdots \otimes I_{X_n} \otimes \mathcal{O}_{D_1}\right)^{\vee}$$

$$I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{(1)}}|_{D_1} \cong I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_1}$$

ここで d-semi-stability であることを使うと，上の2つは同一視される。

s_1は，$X^{(1)}$上では $\quad I_{X_1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{(1)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{(1)}} \quad$ natural map

$\qquad X_1$上では $\quad \mathcal{O}_{X_1}(D_1) \xrightarrow{0} \mathcal{O}_{X_1}$

として定義する。

この時，次の命題が言える，

命題(2.3)　X は、d-semi-stable N.C variety で、
$(X, (L_i, s_i)_{1 \leq i \leq n})$ は、上で構成した log. str. とする。
この時、$L_1 \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \cdots \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} L_n \simeq \mathcal{O}_X$

以上で、d-semi-stable N.C. variety X には、ある種の自然な log. str. が入ることがわかった。今度は、residue field が $\mathbb{C}$ である様な、local Artinian $\mathbb{C}[[t]]$（1変数形式巾級数環）algebra A を考え、$\mathrm{Spec}A$ に次の様に log. str. を導入する。（$\mathrm{Spec}A$ を、1点の上に structure sheaf A がのった複素解析空間と思う）

$$(\mathrm{Spec}A, (A, t)).$$

A は、$\mathrm{Spec}A$ 上の trivial line bundle, A-homomorphism $t : A \to A$ は、$\mathbb{C}[[t]] \to A$ によって、$t : \mathbb{C}[[t]] \longrightarrow \mathbb{C}[[t]]$, $1 \longmapsto t$ をひき戻したもの。

例えば、$A = \mathbb{C}$ と置くと、log. str. は、$(\mathrm{Spec}\mathbb{C}, (\mathbb{C}, 0))$ となる。　さて、(2.2) と、(2.3) を合わせると

$$(X, (L_i, s_i)_{1 \leq i \leq n}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}\mathbb{C}, (\mathbb{C}, 0))$$

を、log. str. の射と思うことができる。

実際、$f: X \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ を自明な射とすると、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{C}} & \xrightarrow[\sim]{(2.3)} & L_1\otimes\cdots\otimes L_n \\ \downarrow 0 & \boxed{} & \downarrow s_1\otimes\cdots\otimes s_n = 0 \\ f^*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathbb{C}} & \underset{id}{=} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

(2.2) の用語を使うと $e_{11} = \cdots = e_{1n} = 1$ と置いている。

定義 (2.4).

$\mathrm{Art}_{\mathbb{C}[[t]]}$: category of local Artinian $\mathbb{C}[[t]]$-algebras with residue field $\mathbb{C}$.

$(X, (L_i, s_i)_{1\le i\le n})$: log. str. 付き d-semi-stable N.C. variety

と置く。$A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Art}_{\mathbb{C}[[t]]})$ に対して、$S = \operatorname{Spec}A$ 上に、上で説明した様に log. str. $(S, (A, t))$ が定まる。$(\mathcal{X}, (\mathcal{L}_i, \mathcal{s}_i)_{1\le i\le n})$ が、$(X, (L_i, s_i)_{1\le i\le n})$ の、S 上の log. deformation であるとは、次の条件が満たされている時を言う。

(1) $\mathcal{X} \to S$ は、X の S 上の flat deformation.

(2) log. str. 付きの複素解析空間として次が可換

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}, (\mathcal{L}_i, \mathcal{s}_i)_{1\le i\le n}) & \longleftarrow & (X, (L_i, s_i)_{1\le i\le n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S, (A, t)) & \longleftarrow & (\operatorname{Spec}\mathbb{C}, (\mathbb{C}, 0)) \end{array}$$

Log. deformation functor F : $Art_{\mathbb{C}[[t]]} \to Sets$ を次の様に定義する。

$$F(A) = \{ (X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n}) \text{ の } S \text{ 上の log. deformation 全体} \}$$

この時、次の定理が成り立つ。

定理(2.5)

(1) F は、Schlessinger[S]の意味で hull $(\mathfrak{X}_R ; R)$ を持つ。

(2) R は、$\mathbb{C}[[t]]$-algebra の構造を持つが、切断、$R \to \mathbb{C}[[t]]$ が存在すれば、X は、smoothable である。

定理(2.6)

$(X, (L_i, s_i)_{1 \le i \le n})$ を、log str. 付きの d-semi-stable N.C. variety。$\dim X = d$、R は (2.5) と同じとする。この時、次が成立する。

(a) $d = 1$ の時、R は $\mathbb{C}[[t]]$ 上 smooth
(特に、X は smoothable)

(b) $d = 2$、X が次を満たせば、R は $\mathbb{C}[[t]]$ 上 smooth

(1) X の各 component は Kähler

(2) $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$

(3) $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

(C) $d \geqq 3$ の時、X が次を満たせば、R は $\mathbb{C}[[t]]$ 上 smooth.

(1) X は projective.（つまり、或る N に対して $\mathbb{P}^N$ に埋め込まれる）

(2) $H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X) = H^{d-2}(X, \mathcal{O}_X) = 0$

(3) $H^{d-2}(X^{[0]}, \mathcal{O}_{X^{[0]}}) = 0$

但し、$X^{[0]}$ は X の normalization を表わす。

X が弱い意味での正規交叉型（つまり、X の各点 p に対して $\mathcal{O}_{X,p} \simeq \mathbb{C}\{z_0, \cdots z_d\}/z_0 \cdots z_\ell \quad 0 \leqq \ell \leqq d$）の場合、ここで紹介した log. str. の定義は適用しなくなる。その為、log. str. の定義を少し変えなくてはならない。詳しくは、[K-N] を参照されたい。

参考文献

[K-N] Kawamata, Y - Namikawa, Y :
Logarithmic deformation of normal crossing varieties and its application to Calabi-Yau manifolds, in preparation

[S] Schlessinger, M :
Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968).