数理解析研究所講究録
第 804 巻 1992 年 121-126

三次元多様体上のAnosov流の横断的不変1形式について

日大生産工 渡辺展也 (Nobuya Watanabe)

Mを3次元閉Riemannian多様体とする。M上のflow ϕ_tがAnosov flowであるとは$D\phi_t$-不変なTMのsplitting $TM=E^0\oplus E^-\oplus E^+$があって，$E^0$は$\phi_t$を生成するベクトル場$X$で張られ ある正の数 $c\geqq 1$，λがあって，

$$\|D\phi_t v\| \geqq c e^{\lambda t}\|v\|, \quad v\in E^+,\ t\geqq 0,$$
$$\|D\phi_t v\| \leqq c^{-1} e^{-\lambda t}\|v\|, \quad v\in E^-,\ t\geqq 0,$$

となること。

このsplittingは一意的で E^-, E^+, $E^0\oplus E^-$, $E^0\oplus E^+$はそれぞれ積分可能で strong-stable, strong-unstable, weak-stable, weak-unstable foliationを定義する.

論文[3]で Hurder と Katok は次のような問を出している。

“もし3次元多様体上の体積を保つAnosov flowがC^∞級のweak-stable and weak-unstable foliation を持つなら適当に time-change をして C^∞ 級の transverse invariant 1-form を持つようにできるか？ 99

η が transverse invariant 1-form であるとは η は 1-form で

$$i_X\eta = 1 \quad と \quad \phi_t^*\eta = \eta$$ をみたす。

η が C^∞ 級でだと E^-, E^+ は C^∞ 級となり E. Ghys[1] によれば Anosov flow ϕ_t は Algebraic と C^∞-同値になる。

定理 ϕ_t を 3次元閉多様体上の体積を保つ Anosov flow とする。もし ϕ_t が C^∞ 級の weak-stable, weak-unstable foliation を持つなら適当に C^∞-time-change して新しい flow が C^∞ 級の transeverse invariant 1-form をもつようにできる。 □.

この定理は E. Ghys [2] により私よりおよそ6ヶ月早く得られていました。

この定理の体積を保つという仮定は大切で体積を保たないで C^∞ 級の weak-stable と weak-unstable foliation を持ちどんな time-change をしても C^∞ 級の transeverse-invariant 1-form を持たない Anosov flow が負定曲率曲面上の測地流

を perturb することにより得られます。

定理の証明　Anosov flow ϕ_t は volume form Ω を保つとします。$E^0 \oplus E^+$, $E^0 \oplus E^-$ はそれぞれ C^∞-1-form ω_+ と ω_- で定義されてるとします。

Lemma 1.　ω_+ と ω_- は次のように選べる。

$$i_X \Omega = \omega_+ \wedge \omega_- . \qquad \square.$$

Frobenius の定理より ある C^∞-1-form η_+ と η_- があって $d\omega_+ = \eta_+ \wedge \omega_+$, $d\omega_- = \eta_- \wedge \omega_-$ となりますが Lemma 1 より

Lemma 2　ある C^∞-1-form η があって

$d\omega_+ = -\eta \wedge \omega_+$, $d\omega_- = \eta \wedge \omega_-$ となる $\square$

この η は ω_+ と ω_- により 1意的に定まる。

Lemma 2 より

Lemma 3　$i_X d\eta = 0$

$\phi_t^* \omega_+ = J_t^+ \omega_+$, $\phi_t^* \omega_- = J_t^- \omega_-$ とすると
ϕ_t が Anosov flow であることより

Lemma 4 ある正の数 $C \leq 1$ と λ があって

$$J_t^- \geq C e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$ □.

$T > 0$ に対し

$$\omega_-^T = \int_0^T \phi_s^* \omega_- ds = \int_0^T J_s^- ds \, \omega_-$$

$$\omega_+^T = \left(\int_0^T J_s^- ds \right)^{-1} \omega_+$$

とし Lemma 2 で ω_+^T と ω_-^T から定まる C^∞ 1-form を η とします。

又、$\bar{J}_t^-$ を $\phi_t^* \omega_-^T = \bar{J}_t^- \omega_-^T$ となるものとします。

Lemma 5 十分大きい $T > 0$ に対し

$$i_X \eta = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \bar{J}_t^- > 0$$ □.

$\tilde{X} = \dfrac{1}{i_X \eta} X$ とおくと $\tilde{X}$ の生成する flow が求める flow になります。

これは Parry [4] の synchronisation を ϕ_t におこなったものになっています。

Remarks

1. time-change で winding class $[i_X\Omega] \in H^2(M,\mathbb{R})$ は定数倍しかかわらず C^∞-transverse 1-form があれば flow は contact flow になるので（M が T^2 の suspension でなければ）winding class $[i_X\Omega]$ が 0 でなければ weak-stable, weak-unstable foliation は C^∞ 級 でない。

2. Lemma 2 より volume を保つ3次元多様体上の Anosov flow の weak-stable と weak-unstable foliation の Godbillon-Vey 数は等しい。

3. Ω に関する ϕ_t の metric entropy は

$$h_\Omega(\phi_t) = \int_M i_X y\,\Omega$$

で与えられる.

Hurder-Katok [4] により 一般に volume を保つ3次元多様体上の Anosov flow の weak-stable weak-unstable fol. は $C^{1+\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ だから $i_X y$ は $C^{1+\alpha}$ ($\forall \alpha<1$) 級である。

References.

1. E. Ghys, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont differentiables, Annales Ecole Norm. Sup. 20 (1987) 251-270.

2. E. Ghys, Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens, preprint Ecole. Norm. Sup. de LYON.

3. S. Hurder and A. Katok, Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows, Publ. Math. IHES 72 (1990) 5-61.

4. W. Parry, Synchronisation of canonical measures for hyperbolic attractors, Commun. Math. Phys. 106 (1986) 267-275.