数理解析研究所講究録
第 804 巻 1992 年 127-138

公理A系に対するPoisson法則

東大・数理科学　平田　雅樹　(Masaki Hirata)

§1　問題と主定理.

M をコンパクト C^∞ Riemann 多様体，$f: M \to M$ を公理A微分同相写像とする。その非遊走集合を Ω で表わし，$f|_\Omega$ は混合的であると仮定する。Lipschitz 連続関数 $u: \Omega \to \mathbb{R}$ をポテンシャルとしてとり，u に対する平衡状態（つまり，$P(u) = h_\mu(f) + \int u\,d\mu$，$P(u)$ は位相的圧力，$h_\mu(f)$ は測度論的エントロピー，を満たす f-不変測度）を $\mu = \mu_u$ とする。今の設定の下では，平衡状態は一意に存在して、Gibbs 測度と一致することは、よく知られた結果である。

$z \in \Omega$ を固定し、$U_\varepsilon(z)$ をその ε-近傍とする。$U_\varepsilon(z)$ 上の確率測度として、平衡状態 μ の $U_\varepsilon(z)$ への制限：

$$\mu_\varepsilon := \frac{\mu|U_\varepsilon(z)}{\mu(U_\varepsilon(z))}$$

をとる。$x \in U_\varepsilon(z)$ が $U_\varepsilon(z)$ に戻るまでの再帰時間を

$$T_\varepsilon(x) := \inf\{ i \in \mathbb{N}^+ \ ; \ f^i x \in U_\varepsilon(z) \}$$

と書き、またk回目の再帰時間を$T_\varepsilon^{(k)}(x)$と書く。

i.e. $T_\varepsilon^{(1)}(x) := T_\varepsilon(x)$

$$T_\varepsilon^{(k+1)}(x) := T_\varepsilon^{(k)}(x) + T_\varepsilon\left(f^{T_\varepsilon^{(k)}(x)} x\right) \qquad k=1,2,\cdots$$

$T_\varepsilon^{(k)}$はμ_ε-a.e.xについて有限であるが、$\varepsilon \to 0$としたとき発散するので、T_εの平均$E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$で規格化することにする。つまり、規格化$k$回再帰時間：

$$C_\varepsilon \cdot T_\varepsilon^{(k)} \qquad C_\varepsilon := 1/E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$$

を考えるとき、$\varepsilon \to 0$での極限分布がどうなるか？を考えたい。

この問題を考えるのに、次のような Counting measure ($\mathbb{R}^+$上の$\mathbb{N}^+$-値 Radon測度)を用意しよう。

$$\gamma_{\varepsilon,x} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{C_\varepsilon \cdot T_\varepsilon^{(k)}(x)}$$

ここで、δ_pは$p \in \mathbb{R}^+$での Dirac のδ-測度.

$\mathbb{R}^+$上の点過程$\gamma_{\varepsilon,\cdot}$を規格化再帰時間過程と呼ぶことにする。先の問題は、$\gamma_{\varepsilon,\cdot}$の$\varepsilon \to 0$での極限を考える問題となる。

上述の問題に対する答えとして、次の主定理を得た。

<u>主定理</u>

μ_u-a.e. $z \in \Omega$に対し、規格化再帰時間過程の有限次

元分布は、$\varepsilon \to 0$ で Poisson 点過程の有限次元分布に収束する。つまり、任意の非負整数 $k_1, \cdots, k_n$ と互いに交わらない $\mathbb{R}^+$ 上の任意の Borel 集合 $B_1, \cdots, B_n$ に対して、次式が成立する：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(\{x \in U_\varepsilon(z)\,;\, Y_{\varepsilon,x}(B_1) = k_1, \cdots, Y_{\varepsilon,x}(B_n) = k_n\})$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{l(B_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-l(B_i)}$$

ただし、l は Lebesgue 測度

上の定理で「μ_u-a.e. $z \in \Omega$ について」は本質的である。実際、$z \in \Omega$ が周期点であるとき、次の反例が成り立つ。

<u>反例</u>

$z \in \Omega$ を周期 m の周期点とする。このとき、規格化 1 回再帰時間 $c_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}$ の $\varepsilon \to 0$ での極限分布は δ-分布と指数分布の線型結合となる。つまり、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(\{x \in U_\varepsilon(z)\,;\, c_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}(x) < t\}) = 1 - \rho_z + \rho_z(1 - e^{-\rho_z t})$$

ここで、$\rho_z := 1 - \exp\{u(z) + u(fz) + \cdots + u(f^{m-1}z)\}$

次節以下で主定理の証明のアウトラインについて述べるが、非遊走集合 Ω には（有限）Markov 分割が存在するので、

問題は本質的には記号力学系での問題に帰着できる。そこで、この報告では主に片側記号力学系で問題を考えていくことにする。

§2 準備

$J=\{1,\cdots,r\}$ を有限集合、$A=(A_{ij})_{i,j=1,\cdots,r}$ を既約な構造行列とする。配置空間 Σ_A^+ を

$$\Sigma_A^+ := \{x=\{x_i\}_{i=0}^{\infty}\in J^{\mathbb{N}} ;\ A_{x_i x_{i+1}}=1 \quad \forall i\in\mathbb{N}\}$$

で定義し、Σ_A^+ 上のシフトを σ で表わす。(i.e. $(\sigma x)_i = x_{i+1}$)

$0<\theta<1$ を固定し、Σ_A^+ 上の距離 $d=d_\theta$ を次のように導入する。

$$d_\theta(x,y)=\theta^n \qquad \text{if } x_i=y_i \ \ i=0,\cdots,n-1,\ x_n\neq y_n .$$

この距離に関する Σ_A^+ 上の実数値Lipschitz連続関数の集合を $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ と書く。ノルム $|||\cdot|||_\theta := \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_\theta$ (ただし、$\|f\|_\theta$ は f のLipschitz定数)に関して、$\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ はBanach空間になる。

ポテンシャル $u\in\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ に対するRuelle作用素 $\mathcal{L}_u$: $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)\to\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ は次のように定義される。

$$\mathcal{L}_u f(x) = \sum_{\sigma y=x} e^{u(y)} f(y) .$$

この作用素のスペクトルについては、次の基本的結果が知られている。

定理 (Ruelle)

$\mathcal{L}_u$ のスペクトル半径は $e^{P(u)}$ で、それは単純な固有値であり、対応する固有関数は正値関数である。

ここで、$\mathcal{L}_u 1 = 1$ なる仮定を置くことにする。これは一般性を失わない仮定であり、また、このとき $P(u) = 0$ となる。

$u \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ に対する平衡状態 (i.e. $P(u) = h_\mu(\sigma) + \int u\, d\mu$ を満たす σ-不変確率測度) を $\mu = \mu_u$ で表わす。この測度に関しては次式が成立する。

$$\int \mathcal{L}_u f \cdot g \, d\mu_u = \int f \cdot g \circ \sigma \, d\mu_u \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+).$$

さて、記号力学系 $(\Sigma_A^+, \sigma, \mu_u)$ に対して問題を設定する。まず、$z \in \Sigma_A^+$ を固定し、その近傍として筒集合

$$[z]_N := \{ x \in \Sigma_A^+ \, ; \, x_i = z_i \quad i = 0, 1, \cdots, N-1 \}$$

をとる。$[z]_N$ 上の確率測度として、

$$\mu_N := \frac{\mu_u|_{[z]_N}}{\mu_u([z]_N)}$$

を定め、$x \in [z]_N$ のシフト σ による $[z]_N$ への再帰時間を $T_N(x)$ と書く。(i.e. $T_N(x) := \inf\{ i \in \mathbb{N}^+ \, ; \, \sigma^i x \in [z]_N \}$)

ここで、次の特異摂動した Ruelle 作用素 $\tilde{\mathcal{L}}_N : \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ を定義する。

$$\tilde{\mathcal{L}}_N f(x) := \mathcal{L}_u(1_{[z]_N^c}\cdot f)(x)$$

$1_{[z]_N^c}$ は$[z]_N$の補集合の定義関数．

簡単な計算から次の補題が成立する。

<u>補題</u>

$$\mu_N(\{x\in[z]_N;\ T_N(x)=i\}) = \int \tilde{\mathcal{L}}_N^{\,i-1}(\mathcal{L}_u 1_{[z]_N})\,d\mu_N$$

さて、最初に問題となるのは、規格化再帰時間$C_N T_N$（$C_N := 1/E_{\mu_N}[T_N]$）の$N\to\infty$での極限分布である。そこで、$C_N T_N$のLaplace変換$\varphi_N(\alpha)$：

$$\varphi_N(\alpha) := \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha C_N i}\,\mu_N(T_N = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha C_N i}\int \tilde{\mathcal{L}}_N^{\,i-1}(\mathcal{L}_u 1_{[z]_N})\,d\mu_N$$

の$N\to\infty$での極限を調べたいが、そのためには$\tilde{\mathcal{L}}_N$のスペクトル，特に絶対値最大固有値の$N\to\infty$での漸近挙動が問題となる。

§3 $\tilde{\mathcal{L}}_N$のスペクトル

Ruelle作用素$\mathcal{L}_u$を解析的に摂動した作用素のスペクトルについては、Ruelle，Pollicottらによってよく調べられているが，特異摂動した作用素である$\tilde{\mathcal{L}}_N$に対しては，それらの結果を直接使うことはできない。そこで具体的に$\tilde{\mathcal{L}}_N$の

スペクトルの性質を調べる必要がある。その構造について、まず次の結果を得た。

命題

円環領域 $\Pi_\theta := \{t \in \mathbb{C} \,;\, \theta < |t| \leq 1\}$ 内の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトルは、有限多重度の孤立した固有値のみからなる。(これらを $\{\lambda_N^{(j)}\}$ と書く)

次に問題となるのは $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の絶対値最大固有値(これを $\tilde{\lambda}_N$ と書く)の $N \to \infty$ での漸近挙動である。これを調べるためには、いくつかの準備が必要である。

まず、$\zeta(t) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を形式的に次式で定義する:

$$\zeta(t) := \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \sum_{x \in \mathrm{Fix}_p \sigma} e^{S_p u(x)}\right\}$$

ここで、$S_p u(x) = u(x) + u(\sigma x) + \cdots + u(\sigma^{p-1} x)$.

これは、Ruelle - Artin - Mazur のゼータ関数と呼ばれ、その極と Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_u$ の固有値との間に次の関係が知られている。

定理 (Ruelle)

円環領域 Π_θ 内の $\mathcal{L}_u$ の固有値を $\{\lambda^{(j)}\}$ と書き、$\lambda^{(j)}$ の多重度を m_j とする。このとき、$1/\lambda^{(j)}$ は円環領域 $\Pi_\theta' := \{t \in \mathbb{C} \,;\, 1 \leq |t| < \theta^{-1}\}$ 内の $\zeta(t)$ の位数 m_j の極であ

る。逆も成立する。

次に形式的な関数 $\tilde{\zeta}_N(t): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を次で定義する：

$$\tilde{\zeta}_N(t) := \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \sum_{x \in \mathrm{Fix}_p \sigma} e^{S_p u(x)} \prod_{j=0}^{p-1} 1_{[z]_N^c}(\sigma^j x)\right\}$$

この関数の極と、$\tilde{\mathcal{L}}_N$ の固有値との間に、先の Ruelle の定理と同様の関係が成立する。

<u>命題</u>

円環領域 Π_θ 内の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の固有値 $\lambda_N^{(j)}$ の多重度を m_j とすると、$1/\lambda_N^{(j)}$ は円環領域 Π_θ' 内の $\tilde{\zeta}_N(t)$ の位数 m_j の極である。逆も成立する。

以上のことから、$\tilde{\zeta}_N(t)$ の収束半径を $\tilde{t}_N$ とすると、

$$\tilde{t}_N = 1/\tilde{\lambda}_N$$

なる関係があることがわかるので、$\tilde{t}_N$ の（$N \to \infty$ での）漸近挙動が問題となる。これに関して次の定理を得た。

<u>定理</u>

μ_u-a.e. z に対して、

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{t}_N = 1 \quad (= \zeta(t) \text{ の収束半径})$$

このことから、$\lim_{N\to\infty} \tilde{\lambda}_N = 1$（$= \mathcal{L}_u$ の最大固有値）なることがわかる。

また、$\tilde{\lambda}_N$ 以外の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトルについては次の補題が成立する。

<u>補題</u>

ある $0 < \delta < 1$ が存在して、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{L}}_N) \setminus \tilde{\lambda}_N\} < \delta$$

（$\mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{L}}_N)$ は $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル集合）

§4 記号力学系に対する Poisson 法則

まず，$\tilde{\mathcal{L}}_N$ は次の様に分解できることに注意しておく。

<u>補題</u>

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = \tilde{\lambda}_N \tilde{E}_N + \tilde{\Phi}_N$$

（ここで，$\tilde{E}_N$ ： $\tilde{\lambda}_N$ に対応する eigen projection.
$\tilde{\Phi}_N$ ： $\tilde{E}_N \tilde{\Phi}_N = \tilde{\Phi}_N \tilde{E}_N = 0$ をみたす有界線型作用素）

上の補題中の $\tilde{\Phi}_N$ については次の評価が成立する。

<u>補題</u>

μ_u-a.e. z に対して，ある自然数 N_0 と正定数 H 及び $0 < \delta < 1$ が存在して，任意の $N > N_0$ に対して

$$\| \tilde{\Phi}_N^i 1 \|_\infty \le H \delta^i \quad \text{for } \forall i \in \mathbb{N}.$$

先の $\tilde{\lambda}_N$ の分解を用いると、規格化再帰時間 $c_N T_N$ の Laplace 変換 $\varphi_N(\alpha)$ は以下の通りに書き下せる。

$$\varphi_N(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha c_N i} \left\{ \tilde{\lambda}_N^{i-1} \int \tilde{E}_N(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N + \int \tilde{\Phi}_N^{i-1}(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N \right\}$$

次に、$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(\alpha)$ の計算に必要な量の計算結果をまとめておくと、

補題

μ_u-a.e. z に対して、

i) $$\lim_{N\to\infty} \frac{\int \tilde{E}_N(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N}{1-\tilde{\lambda}_N} = \lim_{N\to\infty} \int \tilde{E}_N 1\, d\mu_N = 1$$

ii) $$c_N := 1 / E_{\mu_N}[T_N] = \mu_u([z]_N)$$

iii) $$\lim_{N\to\infty} \frac{\int \tilde{E}_N(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N}{c_N} = 1$$

iv) $$\lim_{N\to\infty} c_N \sum_{i=1}^{\infty} \int \tilde{\Phi}_N^{i} 1\, d\mu_N = 0 .$$

これらを用いると、$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$ （μ_u-a.e. z について）。

これは次の定理を意味している。

定理

μ_u-a.e. z に対して、規格化再帰時間 $c_N T_N$ の $N\to\infty$ での極限分布が存在して、それは（パラメータ 1 の）指数分

布である。

次にk回再帰時間 $T_N^{(k)}$ を次で定義する：

$$T_N^{(1)}(x) := T_N(x)$$

$$T_N^{(k)}(x) := T_N^{(k-1)}(x) + T_N\left(\sigma^{T_N^{(k-1)}(x)} x\right) \quad k = 2, 3, \cdots.$$

μ_N はシフトσの$[z]_N$への誘導変換：

$$\sigma^{T_N(\cdot)} : [z]_N \to [z]_N$$

の不変測度であることに注意すれば，$c_N(T_N^{(k+1)} - T_N^{(k)})$ と $c_N T_N$ とは同分布であり，また，$(\Sigma_A^+, \sigma, \mu_u)$ が weakly Bernoulli であることから，$c_N(T_N^{(k+1)} - T_N^{(k)})$ の分布は $N \to \infty$ の極限で互いに独立になることに注意すれば，次の結果を得る。

<u>命題</u>

μ_u-a.e. zに対して，

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\left(c_N T_N^{(k)} \leq t \text{ かつ } c_N T_N^{(k+1)} > t\right) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

ここで，規格化再帰時間過程 $Y_{N,\cdot}$ ：

$$Y_{N,\cdot} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{c_N \cdot T_N^{(k)}(\cdot)}$$

を定義すれば，上の命題は，次のように表現することができる。

定理

μ_u-a.e. z に対して、規格化再帰時間過程 Y_N の有限次元分布は、$N \to \infty$ で Poisson 点過程の有限次元分布に収束する。

§5 Remark.

以上、片側記号力学系についての Poisson 法則について述べてきたが、両側記号力学系に対しても容易に拡張することができる。また、主定理は $z \in \Omega$ の ε-近傍に対しての Poisson 法則なので、Markov 分割に沿った筒集合に対する Poisson 法則とは、若干のギャップがある。しかし、$U_\varepsilon(z)$ を筒集合の有限個の和集合でうまく近似してやることにより、主定理を示すことができる。詳しくは [H] を参照。

文献

[H] : M. Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms
(to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.)