数理解析研究所講究録
第 806 巻 1992 年 17-23

BIFURCATION OF HOMOCLINIC TANGENCY

小室 元政

西東京科学大学

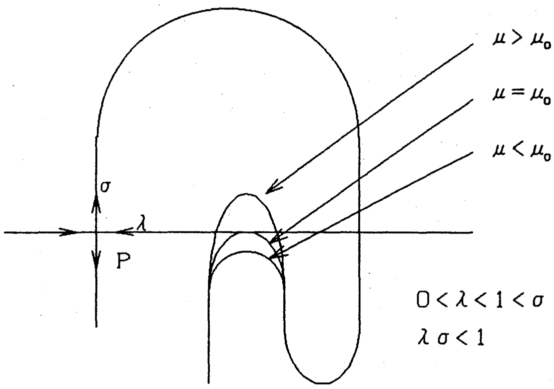
2次元曲面上の微分同相写像がHOMOCLINIC TANGENCYを起こすとき、その近くで生じる分岐現象について、Newhouse-Robinson, Mora-Viana 及び Paris-Takens の結果を中心に報告をする。

§1. 3つの結果の概要

設定 . Mを2-dimensional closed manifold, $f_\mu : M \to M$ をone-parameter family of C^r-diffeomorphisms which nondegenerately creates homoclinic tangency at $\mu = \mu_0$ for the fixed point Pとする。Tf_μはPにおいて固有値$\lambda = \lambda_\mu, \sigma = \sigma_\mu$を持ち

$$0 < \lambda < 1 < \sigma, \qquad \lambda\sigma < 1$$

を満たしているとする。



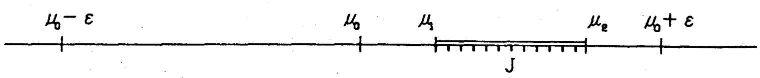
$f \in Diff^r(M)$ が hyperbolic であるとは、non-wandering set $\Omega(f)$ が hypebolic set であること。$f \in Diff^r(M)$ が persistently hyperbolic であるとは、f の C^r近傍$\mathcal{U}$ が存在して任意の $g \in \mathcal{U}$ が hyperboric となること。

$$A = \{\mu \in \mathbb{R} : f_\mu \text{は} \quad \text{persistently hyperboric}\}$$

$$B = \mathbb{R} - A$$

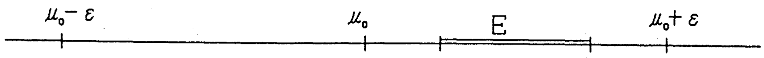
とし B をΩ - bifurcation set と呼ぶ。

NEWHOUSE - ROBINSON の結果. $r = 3$ のとき、$\mu = \mu_0$ の近くで、B は *open interval* を含む。すなわち、*for any* $\varepsilon > 0$, *there are an interval* $[\mu_1, \mu_2] \subset [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ *and a residual subset* $J \subset [\mu_1, \mu_2]$ *such that*
(i) $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$, f_μ *has a wild hyperbolic set,*
(ii)$\forall \mu \in J$, f_μ *has infinitely many sinks.*



MORA - VIANA の結果. $r = \infty$ のとき、$\mu = \mu_0$ の近くで、*non-hyperbolic strange attractor* を持つμ全体の測度は正である. すなわち,

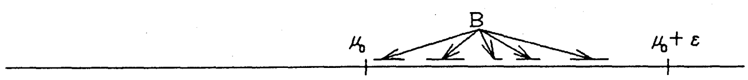
for any $\varepsilon > 0$, there is an $E \subset [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ such that
(i) $m(E) > 0$, and
(ii) $\forall \mu \in E$, f_μ has a non-hyperbolic strange attractor (hence $E \subset B$).



PALIS-TAKENS の結果. ある状況（∗）下では、$\mu = \mu_0$ の近くで、B は A に比べて非常に少ない。すなわち、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{m(B \cap [\mu_0, \mu_0 + \varepsilon])}{\varepsilon} = 0$$

ここで、状況（∗）とは、
(i) $\mu < \mu_0 \Longrightarrow \mu \in A$, (i.e. homoclinic Ω - explosion)
(ii) $d^s + d^u < 1$ (i.e. sum of stable and unstable limit capacities < 1.)



§2. 定義

(1)$f \in Diff^r(M)$ とする。compact set $\Lambda \subset M$ が 次の条件 (i) ~ (iv) を満たすとき、Λ は hyperbolic basic set for f であるという。

(i) $f(\Lambda) = \Lambda$,

(ii) Λ は hyperbolic set,

(iii)Λ は dense orbit を持つ,

(iv) Λ は local product structure を持つ。

hyperbolic basic set Λ が wild hyperbolic set for f であるとは、次の条件を満たすことである。

$\exists \mathcal{U}$: C^2-neightborhood of f such that $\forall g \in \mathcal{U}, \exists q_1, q_2 \in \Lambda(g)$ such that

$W^s(q_2, g)$ has a nondegenerate tangency with $W^u(q_1, g)$.

(2) compact set $\Lambda \subset M$ が次の条件 (i) ~ (iii) を満たすとき、Λ は strange attractor for f であるという。

(i) $f(\Lambda) = \Lambda$,

(ii) $intW^s(\lambda) \neq \emptyset$,

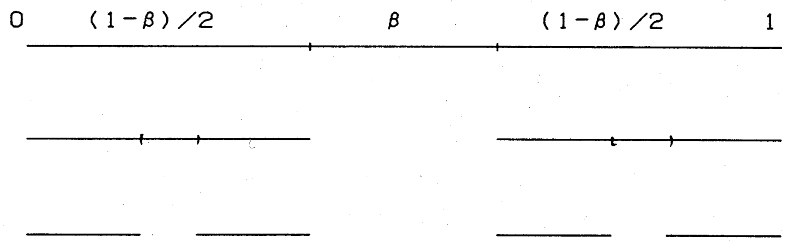
(iii) $\exists z \in \Lambda, \exists c > 0$ and $\exists v \in T_zM$ with $\|v\| = 1$ such that $\{f^n(z) : n \geq 0\}$ is dense in Λ, and $\|Df^n(z) \cdot v\| \geq e^{cn}$ for $\forall n \geq 0$.

(3) $A \subset \mathbb{R}$ は Cantor set とする。A の limit capacity $d(A)$ を次のように定義する。

$$d(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log n(A, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

但し、$n(A, \varepsilon)$ は the minimum number of ε -balles needed to cover A.

例1 the middle β Cantor set

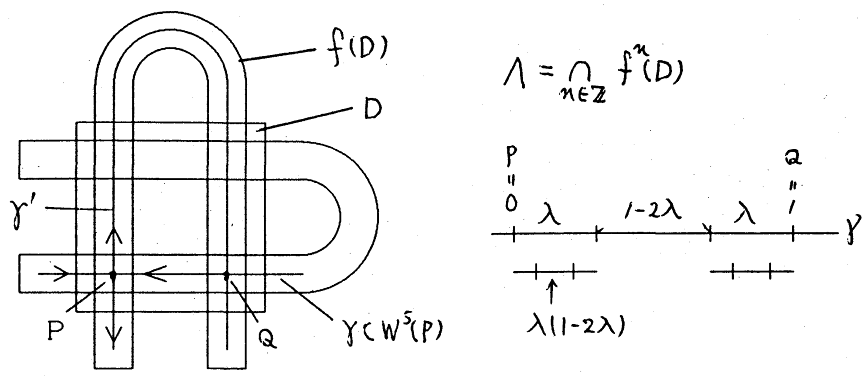


$\varepsilon = \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^k$

$n(A,\varepsilon) = 2^k$

$$d(A) = \frac{\log n(A, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} = \frac{\log 2^k}{-\log(\frac{1-\beta}{2})^k} = \frac{\log 2}{\log 2 - \log(1-\beta)}$$

例2 the affine horseshoe



$A^u = W^u(\Lambda) \cap \gamma$ は middle $(1-2\lambda)$-Cantor set

$$d^u(\Lambda) = d(A^u) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log 2\lambda}$$

$A^s = W^s(\Lambda) \cap \gamma'$ は middle $(1-2\sigma^{-1})$-Cantor set

$$d^s(\Lambda) = d(A^s) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log 2\sigma^{-1}}$$

(4)a family of diffeomorphisms $f_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (-1 \le \mu \le 1)$ が次の条件 (i) ~ (v) を満たすとき、horseshoe 形成族 であるという。

$\exists$ a rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$ such that

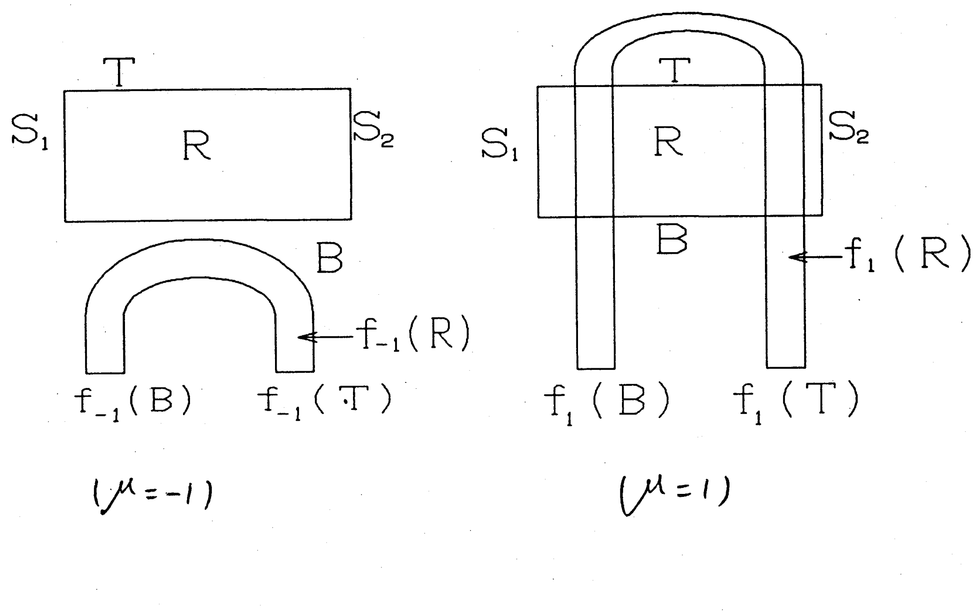
(i) $f_{-1}(R) \cap R = \emptyset$,

(ii) f_1 has a horseshoe,

(iii) $f_\mu(R) \cap S_i = \emptyset \quad (-1 \le \forall\mu \le 1, i = 1, 2)$,

(iv) $f_\mu(T) \cap R = \emptyset, f_\mu(B) \cap R = \emptyset \quad (-1 \le \forall\mu \le 1)$,

(v) $|\det Df_\mu| < 1$ on $R \quad (-1 \le \forall\mu \le 1)$.

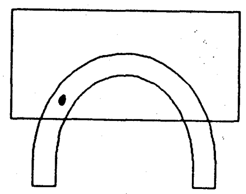


§3. HORSESHOE 形成族

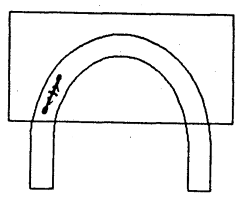
3つの定理に共通の視点として次の点があげられる。

(1) nondegenerate homoclinic tangency が$\mu=\mu_0$で起こるとき、十分大きなnと、μ_0 の近くの μ に対して、f_μ^nは horseshoe 形成族となる。

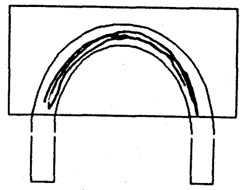
(2)horseshoe 形成族の性質が f_μに反映する。



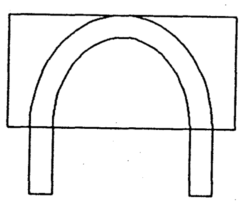
① sink



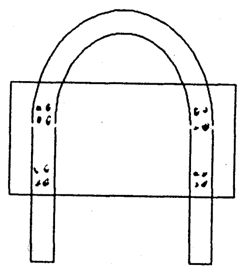
② period-doubling



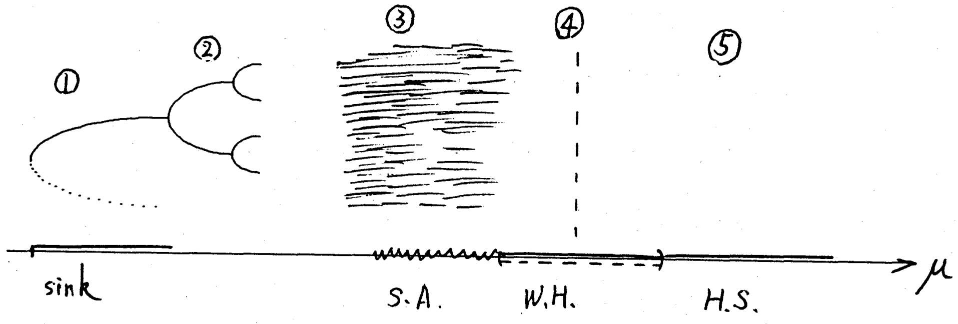
③ strange attractor



④ wild hyperbolic set



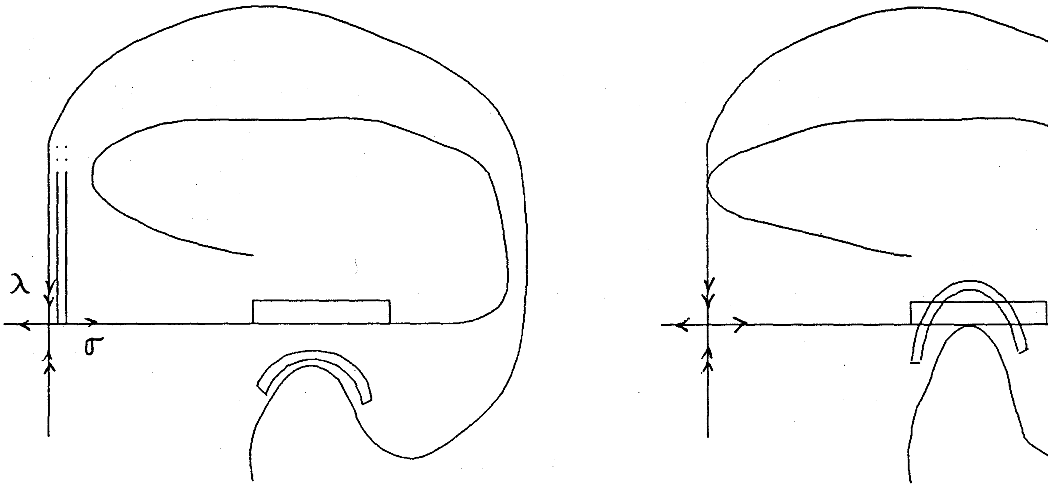
⑤ horseshoe



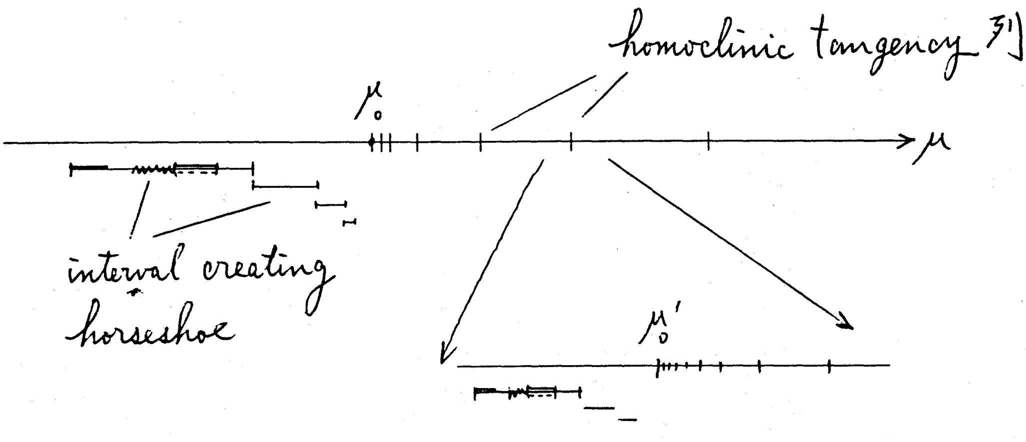
(interval creating horseshoe)

§4. HOMOCLINIC TANGENCY の例

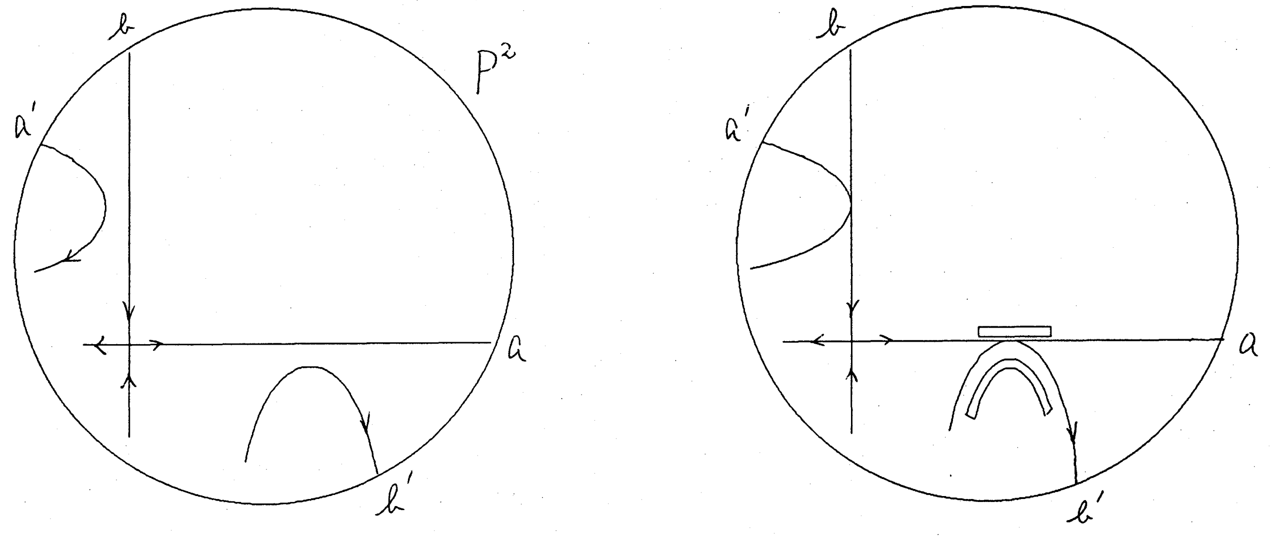
(1) premature creation of horseshoes

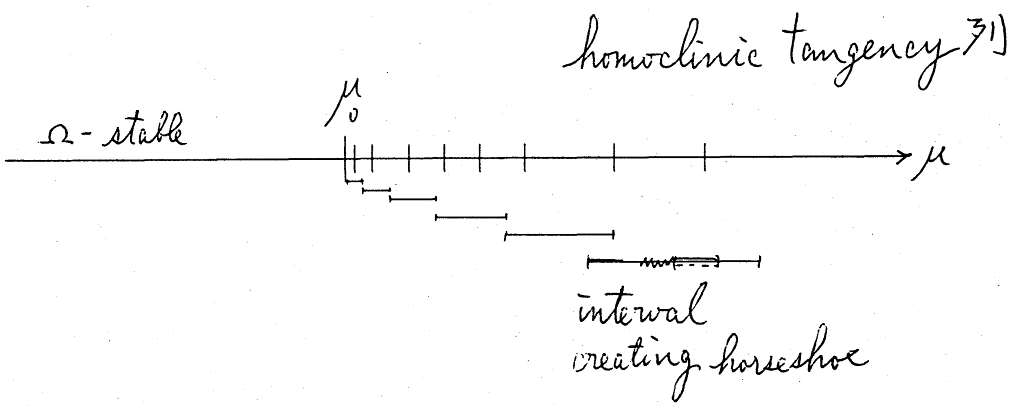


$\sigma\lambda < 1$



(2) homoclinic Ω -explosion





[1] S.Newhouse; The abundance of wild hyperbolic set and non-smooth stable sets for diffeomorphisms, Publ. I.H.E.S. 50 (1979), 101-151.

[2] C.Robinson; Bifurcation to infinitely many sinks, Commun. Math. Phys. 90 (1983), 433-459.

[3] J.Palis and F.Takens ; Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, Annals of Math.,125(1987), 337-374.

[4] L.Mora and M.Viana; Abundance of strange attractors, to appear in ACTA Math.