数理解析研究所講究録
第808巻 1992年 227-243

Sklyanin代数のhigher spin表現を用いたBethe Ansatz

東京大・理 武部 尚志 (Takashi Takebe)

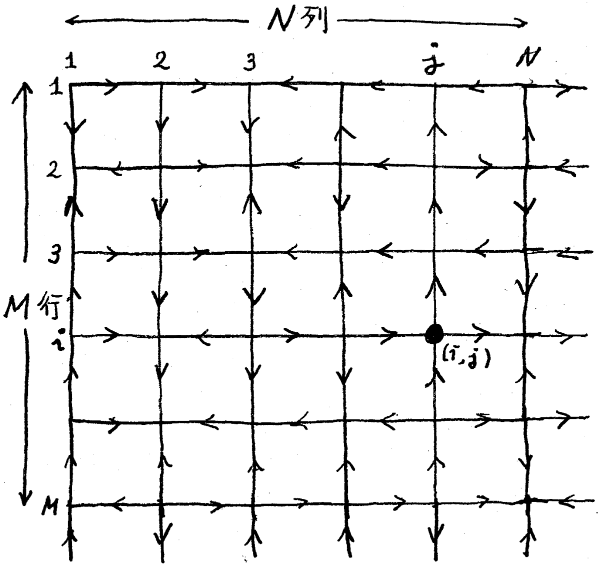
§0 序

統計力学における2次元格子模型は、70年代以後Baxter, レニングラードschool, 京都school等によってその数学的構造が研究され、特に量子逆散乱法を経て、量子群の発見の一端となった。その際に中心的役割を果すのがYang-Baxter方程式と呼ばれる関係式であることは良く知られている。

量子群と直接に結びついていたのは、三角関数型R行列と呼ばれるYang-Baxter方程式の解であったが、ある極限でこの解を与える楕円関数型R行列という解があり、それぞれ6-vertex model, 8-vertex modelという模型に対応している。

ここでは、この楕円型R行列を用いて定義される代数(Sklyanin代数)の表現を使って8-vertex modelを一般化し、これにBethe Ansatzと呼ばれる手続を適用して、この模型のtransfer行列の固有ベクトルを構成できる事を示す。

§1 8 vertex model



結晶格子を非常に単純化した右のような $M \times N$ の格子（$M+1$ 行目は 1 行目と、$N+1$ 列目は 1 列目と同一視する）を考え、各辺は2つの"状態"のいずれか一つをとるものとする。2つの状態は、便宜上 $(\rightarrow, \leftarrow)$ 及び $(\uparrow, \downarrow)$ で表す。この系のエネルギーは、これらの状態の配置 (configuration) に対して、

$$E(\text{configuration}) = \sum_{(i,j)} E(i,j)$$

のように、各頂点 (vertex) での系のエネルギーの和になるとする。ここで $E(i,j)$ は、頂点 (i,j) での系のエネルギーで (i,j) につながる4本の辺上の状態の配置のみによって決まる。例えば、上の図の例では、

$E(i,j) = E\Big($  $\Big)$

さて、統計力学では、このような模型に対して分配関数 (partition function):

$$(1.1) \qquad Z = \sum_{\substack{\text{可能なすべての} \\ \text{configuration}}} e^{-\beta E(\text{configuration})}$$

及び、系を大きくした時の熱力学的極限での(一原子当りの)自由エネルギー:

$$f = \frac{1}{\beta} \lim_{M,N \to \infty} \frac{1}{MN} \log Z \tag{1.2}$$

を求めることが重要である。(βは絶対温度の逆数に比例するパラメーター。)これを求めるための一つの方策が、次に述べるtransfer行列の方法である。

今、(1.1)にあらわれる2^{MN}項の巨大な和を次のように順序交換して変形しよう.

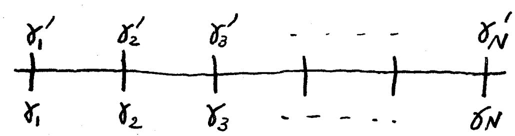
$$Z = \sum_{\{\gamma_1\}} \sum_{\{\gamma_2\}} \cdots \sum_{\{\gamma_N\}} T_{\{\gamma_1\}\{\gamma_2\}} T_{\{\gamma_2\}\{\gamma_3\}} \cdots T_{\{\gamma_N\}\{\gamma_1\}} \tag{1.3}$$

$$T_{\{\gamma\}\{\gamma'\}} = \sum_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{N} e^{-\beta E\left(\alpha_j \, {}^{\gamma'_j}_{\gamma_j} \, \alpha_{j+1}\right)} \qquad \alpha_{N+1} = \alpha_1 \tag{1.4}$$

ここで、$\{\gamma\}$, $\{\alpha\}$は、それぞれ(↑又は↓)及び(→又は←)をN個ずつ並べたものである。$V = \mathbb{C}\uparrow \oplus \mathbb{C}\downarrow \cong \mathbb{C}^2$を、↑と↓を基底とするベクトル空間とすれば、$T_{\{\gamma\}\{\gamma'\}}$を行列要素とする行列:

$$T = \left(T_{\{\gamma\}\{\gamma'\}}\right)_{\{\gamma\},\{\gamma'\}} \tag{1.5}$$

は、$\mathcal{H} = V^{\otimes N}$の線型変換の行列と見ることができる。これを(row-to-row) transfer行列と呼ぶ。記号的に、

$T =$ 

とも書く。行列Tを使えば、(1.3) は、

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}}\, T^{M} \tag{1.6}$$

と行列のトレースを使って簡単に表される。

ここまでは、各頂点へのエネルギーの与え方によらない一般論であった。以下では、"解ける模型"の代表的例である8-vertex modelを考える。模型の指定は、エネルギーEそのものよりも、Boltzmann weight $e^{-\beta E}$ の与え方を指定する方が便利である。8-vertex modelは、次のようにBoltzmann weightが指定された模型である：

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & & & d(\lambda) \\ & b(\lambda) & c(\lambda) & \\ & c(\lambda) & b(\lambda) & \\ d(\lambda) & & & a(\lambda) \end{pmatrix} = \sum_{a=0}^{3} W_a(\lambda)\sigma^a \otimes \sigma^a \tag{1.7}$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W_0(\lambda) = \frac{\theta_{11}(\lambda+\eta)}{\theta_{11}(\eta)},\ W_1(\lambda) = \frac{\theta_{10}(\lambda+\eta)}{\theta_{10}(\eta)},\ W_2(\lambda) = \frac{\theta_{00}(\lambda+\eta)}{\theta_{00}(\eta)},\ W_3(\lambda) = \frac{\theta_{01}(\lambda+\eta)}{\theta_{01}(\eta)} \tag{1.8}$$

($\theta_{ij}(z) = \theta_{ij}(z,\tau)$: characteristicを持つテータ関数 [Mumford] 参照)

(1.7)は、例えば2行目( ) 3列目( )の行列要素 $c(\lambda)$ が、 という配置に対するエネルギーを与える、と読む。8種類の配置に対してのみ0でないBoltzmann weightが定義されているので8 vertex modelと呼ぶ。このモデルは、楕円曲線のmodulus τ $(\mathrm{Im}\,\tau>0)$, "スペクトル・パラメーター" λ, "非等方性パ

ラメーターηという3つのパラメーターを含む。$R(\lambda)$は、Yang-Baxter方程式:

$$R^{12}(\lambda-\mu)\,R^{13}(\lambda)\,R^{23}(\mu) = R^{23}(\mu)\,R^{13}(\lambda)\,R^{12}(\lambda-\mu) \tag{1.9}$$

を満たし、(Baxterの)楕円R行列と呼ばれる。ここで、

$$R^{12}(\lambda)=\sum W_a\,\sigma^a\otimes\sigma^a\otimes 1_V,\quad R^{13}(\lambda)=\sum W_a\,\sigma^a\otimes 1_V\otimes\sigma^a,\quad R^{23}(\lambda)=\sum W_a\,1_V\otimes\sigma^a\otimes\sigma^a$$

という$V^{\otimes 3}$に作用する行列である。

Baxterは、70年代初めにこの模型を研究し、$T(\lambda)$の固有値と固有ベクトルを計算した。(1.6)から分かる様に、分配関数Zを求めるには、$T(\lambda)$の固有値が分かればよい。更に、自由エネルギーfを求めるには、(1.2)から分かるように最大固有値さえ知ればよい。このように問題は結局$T(\lambda)$のスペクトルに帰着される。また、$T(\lambda)$は磁性体のモデルであるXYZ模型という1次元量子力学系のHamiltonianとも密接に結びついており、その意味でも$T(\lambda)$のスペクトルは重要である。

Baxterの方法は技巧的なものであったが、この方法を量子逆散乱法の立場から明快に説明したのが、[Takhtajan-Faddeev] (1979)である。(1.4)からtransfer行列$T(\lambda)$は、$\mathrm{End}(\mathfrak{h})$の元を成分とする$2\times 2$行列のトレースとして、

$$T(\lambda) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2}\,\mathcal{T}(\lambda) \tag{1.10}$$

$$\mathcal{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} := L_N(\lambda)\,L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) \tag{1.11}$$

(1.12) $$L_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_m(\lambda) & \beta_m(\lambda) \\ \gamma_m(\lambda) & \delta_m(\lambda) \end{pmatrix} := \sum_{a=0}^{3} W_a(\lambda)\,\sigma^a \otimes \sigma_m^a$$

$$\left(\sigma_m^a = \underbrace{1_V \otimes \cdots \otimes 1_V \otimes \overset{}{\underset{\widehat{m}}{\sigma^a}} \otimes 1_V \otimes \cdots \otimes 1_V}_{N} \in End(\mathfrak{h}) \right)$$

と表される。量子逆散乱法の立場では、L_mは線型散乱問題の局所遷移行列、$T(\lambda)$はモノドロミー行列と解釈される。重要なのは、L_mが

(1.13) $$\overset{12}{R}(\lambda-\mu)\,\overset{1}{L}_m(\lambda)\,\overset{2}{L}_m(\mu) = \overset{2}{L}_m(\mu)\,\overset{1}{L}_m(\lambda)\,\overset{12}{R}(\lambda-\mu)$$

$$\left(\begin{array}{l} \overset{1}{L}_m(\lambda) = \sum W_a\, \sigma^a \otimes 1_V \otimes \sigma_m^a, \quad \overset{2}{L}_m(\lambda) = \sum W_a\, 1_V \otimes \sigma^a \otimes \sigma_m^a \\ \overset{12}{R}(\lambda) = \sum W_a\, \sigma^a \otimes \sigma^a \otimes 1_{\mathfrak{h}} \end{array} \right)$$

を満たし、従って(1.11)より

(1.14) $$\overset{12}{R}(\lambda-\mu)\,\overset{1}{T}(\lambda)\,\overset{2}{T}(\mu) = \overset{2}{T}(\mu)\,\overset{1}{T}(\lambda)\,\overset{12}{R}(\lambda-\mu)$$

が成り立つことである。($\overset{1}{T}, \overset{2}{T}$ は $\overset{1}{L}_m, \overset{2}{L}_m$ と同様に定義する。)この式は、(1.11)の$A(\lambda), \cdots, D(\lambda)$の交換関係を与えている。この交換関係を使って、次節で$T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$の固有ベクトルを構成する。

§2 Bethe Ansatz

まず簡単な6 vertex modelのBethe Ansatzの概略を述べ、8-vertex modelではどのように変更が必要か説明する。

6 vertex modelのBoltzmann weightは、(1.7)で楕円曲線の

モジュラスてをi∞へ飛ばした極限として定義される。適当な比例定数をかけて、

$$(2.1) \qquad R(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & & & \\ & b(\lambda) & c(\lambda) & \\ & c(\lambda) & b(\lambda) & \\ & & & a(\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a(\lambda) = \sin(\lambda+\eta) \\ b(\lambda) = \sin(\lambda-\eta) \\ c(\lambda) = \sin 2\eta \end{array}$$

となる。$L_m(\lambda)$ も (1.12) と同様に定義される。定義から明らかに、$L_m(\lambda)$ の成分 $\alpha_m(\lambda), \cdots, \delta_m(\lambda)$ は、$\mathfrak{h} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{N\text{コ}}$ の m 番目の成分以外には、1_V として作用するので、自然に V 上の作用素とも考えられる。この時、

$$(2.2) \qquad \alpha_m(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & \\ & b(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \delta_m(\lambda) = \begin{pmatrix} b(\lambda) & \\ & a(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \gamma_m(\lambda) = \begin{pmatrix} & c(\lambda) \\ & \end{pmatrix}$$

となるから、$\omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると、(local vacuumと呼ぶ)

$$(2.3) \qquad \alpha_m(\lambda)\,\omega_m = a(\lambda)\,\omega_m, \quad \delta_m(\lambda)\,\omega_m = b(\lambda)\,\omega_m, \quad \gamma_m\,\omega_m = 0$$

となる。そこで、$\Omega = \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_N \in \mathfrak{h}$ とすると、(1.11)より

$$(2.4) \qquad A(\lambda)\,\Omega = a(\lambda)^N \Omega, \quad D(\lambda)\,\Omega = b^N(\lambda)\,\Omega, \quad C(\lambda)\,\Omega = 0$$

である。Bethe Ansatz（のレニングラード学派による定式化）とは、$T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ の固有ベクトルを、

$$(2.5) \qquad \Psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_M) = B(\lambda_1)\,B(\lambda_2) \cdots B(\lambda_M)\,\Omega$$

という形をしていると仮定して探そう、というものである。(1.14)から、

$$(2.6) \qquad [\,B(\lambda),\, B(\mu)\,] = 0, \quad A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\mu,\lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu,\lambda)}{c(\mu,\lambda)} B(\lambda)A(\mu)$$

$$\left(b(\mu,\lambda) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\mu-\lambda+2\eta)}, \quad c(\mu,\lambda) = \frac{\sin(\mu-\lambda)}{\sin(\mu-\lambda+2\eta)} \right)$$

等が得られるので、(2.4) とあわせて $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ の $\Psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_M)$

への作用が計算できる。その結果$\Psi(\lambda_1,\cdots,\lambda_M)$は、$\lambda_j$について

$$(2.7)\qquad \frac{a(\lambda_j)^N}{b(\lambda_j)^N} = \prod_{k=1,k\neq j}^{M} \frac{c(\lambda_k,\lambda_j)}{c(\lambda_j,\lambda_k)} \qquad (j=1,\cdots,M)$$

という超越方程式（Bethe方程式）が成り立つ時$T(\lambda)$の固有ベクトルで、固有値は

$$(2.8)\qquad \Lambda(\lambda;\lambda_1,\cdots,\lambda_M) = a^N(\lambda)\prod_{k=1}^{M} c(\lambda_k,\lambda)^{-1} + b^N(\lambda)\prod_{k=1}^{M} c(\lambda,\lambda_k)^{-1}$$

となる。

以上が6 vertex modelについてのBethe Ansatzの~~概要~~だが、もとの8 vertexの場合にはこのままではうまくいかない。(1.7)と(2.1)を比べると分る通り、6 vertex modelではγ_nが(2.2)のように退化していたが、8 vertex modelではγ_nが非退化で、(2.3)のようなlocal vacuumは存在しない。[Takhtajan-Faddeev]は、gauge変換によって$L_m(\lambda)$をひねる：

$$(2.9)\qquad L_m(\lambda) \longmapsto L_m^n(\lambda;s,t) = \begin{pmatrix} \alpha_m^n(\lambda) & \beta_m^n(\lambda) \\ \gamma_m^n(\lambda) & \delta_m^n(\lambda) \end{pmatrix}$$
$$:= M_{m+n}^{-1}(\lambda;s,t)\, L_m(\lambda)\, M_{m+n-1}(\lambda;s,t).$$

ことで、これを解決した。ここで、s,tはパラメーターで、

$$(2.10)\qquad M_k(\lambda;s,t) = \begin{pmatrix} \bar\theta_{11}(s+2k\eta-\lambda) & C_k\bar\theta_{11}(t+2k\eta+\lambda) \\ \bar\theta_{01}(s+2k\eta-\lambda) & C_k\bar\theta_{01}(t+2k\eta+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$C_k = \left(\theta'_{10}\left(\tfrac{s+t}{2}+2k\eta\right)\right)^{-1}$$

$$\left(\bar\theta_{ij}(z) = \theta_{ij}\left(\tfrac{z}{\tau},-\tfrac{2}{\tau}\right),\quad \theta'_{ij}(z) = \theta_{ij}\left(\tfrac{z}{\tau},-\tfrac{1}{\tau}\right)\right)$$

である。C_kの決め方から、$\det M_k$はkによらない。このように$L_m(\lambda)$をひねれば、$\gamma_m^n(\lambda)$は退化して、

(2.11) $$\omega_m^n = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_{11}\,(s+2(m+n)\eta) \\ \bar{\theta}_{01}\,(s+2(m+n)\eta) \end{pmatrix}$$

でlocal vacuumを定義すれば、(2.3)の代りに、

(2.12) $$\alpha_m^n(\lambda)\,\omega_m^n = h(\lambda+2\eta)\,\omega_m^{n-1},\quad \delta_m^n(\lambda)\,\omega_m^n = h(\lambda)\,\omega_m^{n+1},$$
$$\gamma_m^n(\lambda)\,\omega_m^n = 0$$

となる ($h(z) = \mathrm{const.}\times\bar{\theta}_{01}(z)\,\bar{\theta}_{11}(z)$)。従って、gauge 変換されたモノドロミー行列を

(2.13) $$\mathcal{T}^n(\lambda) = \begin{pmatrix} A^n(\lambda) & B^n(\lambda) \\ C^n(\lambda) & D^n(\lambda) \end{pmatrix} := L_N^n(\lambda)\cdots L_2^n(\lambda)\,L_1^n(\lambda)$$
$$= M_{N+n}^{-1}(\lambda;s,t)\;\mathcal{T}(\lambda)\;M_n(\lambda;s,t)$$

で定義し、Ωの代りに$\Omega^n = \omega_1^n\otimes\omega_2^n\otimes\cdots\otimes\omega_N^n$ を使うと、(2.4)は

(2.14) $$A^n(\lambda)\,\Omega^n = h^N(\lambda+2\eta)\,\Omega^{n-1},\quad D^n(\lambda)\,\Omega^n = h^N(\lambda)\,\Omega^{n+1}$$
$$C^n(\lambda)\,\Omega^n = 0$$

に置き換る。Bethe Ansatzを使うためには、さらに

(2.15) $$\mathcal{T}_{k,k'}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{k,k'}(\lambda) & B_{k,k'}(\lambda) \\ C_{k,k'}(\lambda) & D_{k,k'}(\lambda) \end{pmatrix} = M_k(\lambda)^{-1}\,\mathcal{T}(\lambda)\,M_{k'}(\lambda)$$

を導入する必要がある。$\mathcal{T}^n(\lambda) = \mathcal{T}_{N+n,n}(\lambda)$ であり、$T(\lambda) = A(\lambda)+D(\lambda) = A_{k,k}(\lambda) + D_{k,k}(\lambda)$ である。(2.5)に代わるものとしては、

(2.16) $$\Psi_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_M) = B_{n+1,n-1}(\lambda_1)\cdots B_{n+M,n-M}(\lambda_M)\,\Omega^{n-M}$$

をとる。(2.6)と同様に(1.14)から、

(2.17) $$B_{k,k'+1}(\lambda)\,B_{k+1,k'}(\mu) = B_{k,k'+1}(\mu)\,B_{k+1,k'}(\lambda)$$
$$A_{k,k'}(\lambda)\,B_{k+1,k'-1}(\mu) = \alpha(\lambda,\mu)B_{k,k'-2}(\mu)A_{k+1,k'-1}(\lambda) - \beta_{k'-1}(\lambda,\mu)B_{k,k'-2}(\lambda)\,A_{k+1,k'-1}(\mu)$$

等が得られるので、$T(\lambda)$ の $\Psi_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_M)$ への作用が計算できる
$\left(\alpha(\lambda,\mu)=\dfrac{h(\lambda-\mu-2\eta)}{h(\lambda-\mu)},\ \beta_k(\lambda,\mu)=\dfrac{h(2\eta)\,h(\tau_k+\mu-\lambda)}{h(\mu-\lambda)\,h(\tau_k)},\ \tau_k=\dfrac{s+t}{2}+2k\eta-\dfrac{1}{2}\right)$。
但し、(2.14)から、これがうまくいく為には $M=$ (2.16)の B の数 $=N/2$ でなくてはならない(N を偶数と仮定する)。また、$A^n(\lambda)$ や $D^n(\lambda)$ の作用で、$\Omega^n\to\Omega^{n\pm1}$ となるので、

$$\Psi_\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_M)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi in\theta}\,\Psi_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_M) \tag{2.18}$$

の形で、$T(\lambda)$ の固有ベクトルを探すことになる。結果は、

$$\frac{h^N(\lambda_j+2\eta)}{h^N(\lambda_j)}=e^{-4\pi in\theta}\prod_{k=1,\,k\neq j}^{M}\frac{\alpha(\lambda_k,\lambda_j)}{\alpha(\lambda_j,\lambda_k)}\qquad(j=1,\cdots,M) \tag{2.19}$$

の下で $\Psi_\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_M)$ は固有値

$$e^{2\pi i\theta}\,(h(\lambda+2\eta))^N\prod_{k=1}^{M}\alpha(\lambda,\lambda_k)+e^{-2\pi i\theta}\,(h(\lambda))^N\prod_{k=1}^{M}\alpha(\lambda_k,\lambda) \tag{2.20}$$

を持つ固有ベクトルである。

[Takhtajan-Faddeev] では、Bethe 方程式(2.19)の解の $N\to\infty$ での漸近挙動などを仮定して、8 vertex model の自由エネルギーを計算し Baxter の結果を導いているが、ここではこれ以上は立ち入らない。

§3 Sklyanin代数

前節で見た通り、関係式(1.14)は模型の"可解性"に極めて基本的な役割を果していた。そこで、このような関係式を満た

すような $L(\lambda)$ を探すことが当然問題になる。Sklyanin は、L が

(3.1) $$L(\lambda)=\sum_{a=0}^{3} W_a(\lambda)\,\sigma^a\otimes S^a$$

という形をしていると仮定すると、

(3.2) $$R^{12}(\lambda-\mu)\,L^1(\lambda)\,L^2(\mu)=L^2(\mu)\,L^1(\lambda)\,R^{12}(\lambda-\mu)$$

が成り立つことは、S^a が次の関係式を満たすことと同値であることを示した [Sklyanin (1982)]:

(3.3) $$\begin{aligned}[S^\alpha, S^0]_- &= -i\,J_{\alpha\beta}\,[S^\beta, S^\gamma]_+ ,\\ [S^\alpha, S^\beta]_- &= \quad i\,[S^0, S^\gamma]_+ .\end{aligned}$$

ここで、(α,β,γ) は、$(1,2,3)$ の巡回置換, $[A,B]_\pm = AB\pm BA$, 又、$J_{\alpha\beta}=(W_\alpha^2-W_\beta^2)/(W_\gamma^2-W_0^2)$ で具体的には

(3.4) $$J_{12}=\frac{\theta_{01}(\eta)^2\,\theta_{11}(\eta)^2}{\theta_{00}(\eta)^2\,\theta_{10}(\eta)^2},\quad J_{23}=\frac{\theta_{10}(\eta)^2\,\theta_{11}(\eta)^2}{\theta_{00}(\eta)^2\,\theta_{01}(\eta)^2},\quad J_{31}=-\frac{\theta_{00}(\eta)^2\,\theta_{11}(\eta)^2}{\theta_{01}(\eta)^2\,\theta_{10}(\eta)^2}$$

である。重要なのは $J_{\alpha\beta}$ が λ によらないということであり、(3.3) は (τ と η をパラメーターとする) 代数の関係式となる。

$$Q=\langle S^0, S^1, S^2, S^3\rangle \big/ \underset{(3.3)}{\sim}$$

を Sklyanin 代数と呼ぶ。§0 で述べたように、楕円型 R 行列の極限は三角関数型 R 行列で、これは量子群と結びついていた。Sklyanin 代数についても、S^α を適当にスケール変換しながら極限をとることによって、

$$\tau\longrightarrow i\infty \quad で \quad Q\longrightarrow U_q(sl(2,\mathbb{C}))\qquad (q=e^{\pi i\tau})$$

$$\eta\longrightarrow 0 \quad で \quad Q\longrightarrow U(sl(2,\mathbb{C}))$$

となる。

Sklyanin は [Sklyanin(1983)] で、この代数の有限次元表現を詳しく調べた。ここでは、次の"spin ℓ"表現 $(\ell=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots)$ を使う。これは、$2\ell+1$ 次元の整関数の空間

$$V_\ell=\left\{f(v):\mathbb{C}\text{上正則}\,\middle|\,\begin{array}{l}f(v+1)=f(-v)=f(v),\\ f(v+\tau)=e^{-4\pi i\ell(2v+\tau)}f(v)\end{array}\right\}$$

上の表現で、各生成元の作用は、

$$(3.5)\qquad (S^a f)(v)=\frac{s_a(v-\ell\eta)f(v+\eta)-s_a(-v-\ell\eta)f(v-\eta)}{\theta_{11}(2v)}$$

で与えられる。ただし、

$$s_1(v)=\theta_{11}(\eta)\,\theta_{11}(2v),\quad s_1(v)=\theta_{10}(\eta)\,\theta_{10}(2v),$$
$$s_2(v)=i\theta_{00}(\eta)\,\theta_{00}(2v),\quad s_3(v)=\theta_{01}(\eta)\,\theta_{01}(2v)$$

である。

特に $\ell=1/2$ の場合は (1.12) に相当し S^a を Pauli 行列 σ^a で表わすことができる。$V_{\frac{1}{2}}$ の基底として、

$$(\theta_{00}(2v,2\tau)-\theta_{10}(2v,2\tau),\ \theta_{00}(2v,2\tau)+\theta_{10}(2v,2\tau))$$

を取れば、(3.5) より S^a は

$$(3.6)\qquad S^a=2\,\frac{\theta_{00}(\eta)\,\theta_{01}(\eta)\,\theta_{10}(\eta)\,\theta_{11}(\eta)}{\theta_{00}(0)\,\theta_{01}(0)\,\theta_{10}(0)}\sigma^a$$

となる。S^a の間の関係式 (3.3) は 2 次同次式であるから、表現は勝手な定数を掛けることができることに注意する。

§4　8 vertex model の一般化

以上述べてきたことを組み合せようというのが、この小論の目的である。

$\{l_1, l_2, \cdots, l_N\}$ を半整数の列とし、スピン l_m を持つ L 行列を (3.5) の表現を使って、

$$(4.1) \qquad L_m(\lambda) = \sum_{a=0}^{3} W_a(\lambda)\, \sigma^a \otimes \rho^{(m)}_{l_m}(S^a)$$

によって定義する。ここで、$\rho^{(m)}_{l_m}$ は、Sklyanin 代数のスピン l_m 表現を $\mathfrak{h}_J = V_{l_1} \otimes V_{l_2} \otimes \cdots \otimes V_{l_N}$ の第 m 成分に作用させる表現：

$$(4.2) \qquad Q \ni X \longmapsto \rho^{(m)}_{l_m}(X) = 1_{V_1} \otimes \cdots \otimes 1_{V_{m-1}} \otimes \rho_{l_m}(X) \otimes 1_{V_{m+1}} \otimes \cdots \otimes 1_{V_N}$$

である。この L 行列から、モノドロミー行列を (1.11) と同様に、

$$(4.3) \qquad \mathcal{T}(\lambda) := L_N(\lambda) \cdots L_2(\lambda) L_1(\lambda) =: \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

で定義して、$T(\lambda) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^2} \mathcal{T}(\lambda)$ の固有値，固有ベクトルを計算することが問題である。物理的には，不均一な格子模型を考えていることになる（更に、$L_m(\lambda)$ を $L_m(\lambda - \mathring{\lambda}_m)$ のように定数 $\mathring{\lambda}_m$ を導入してずらし、スペクトル・パラメーターも不均一にできる。[Takebe] 参照)。

§2 と同様に，適当な gauge 変換によって L_m をひねって，local vacuum が存在するようにして Bethe Ansatz を適用しよう。必要な gauge 変換は、スピン 1/2 の場合とほぼ同じで、

$$(4.4)\qquad L_m(\lambda) \longmapsto L_m^n(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_m^n(\lambda) & \beta_m^n(\lambda) \\ \gamma_m^n(\lambda) & \delta_m^n(\lambda) \end{pmatrix}$$
$$:= M_m^n(\lambda; s, t; l_m)^{-1} L_m(\lambda)\, M_{m-1}^n(\lambda; s, t; l_m)^{-1},$$

ただし、(2.10) の M_k を使って、

$$(4.5)\qquad M_m^n(\lambda; s, t; l) := M_{2lm+n}(\lambda; s, t)$$

と定義する。local vacuum ω_m^n は、

$$\omega_m^n(s; v) = a_m^n(s)\, \tilde{\omega}_m^n(s; v) \in V_{l_m},$$

$$\tilde{\omega}_m^n(s; v) = \prod_{k=1}^{2l_m} \theta\left(v + \frac{s}{2} + \frac{\tau}{4} + \left(2l_m m + n - 3l_m - \frac{1}{2}\right)\eta + 2k\eta\right)$$

$$(4.6)\qquad \times \prod_{k=1}^{2l_m} \theta\left(v - \frac{s}{2} - \frac{\tau}{4} - \left(2l_m m + n - 3l_m - \frac{1}{2}\right)\eta - 2k\eta\right),$$

$$\frac{a_m^n(s)}{a_m^{n-1}(s)} = \exp\left\{\frac{4\pi i l_m \eta}{\tau}\left(s + 2(2l_m m + n)\eta - 2l\eta\right) - 2\pi i l\eta\right\},$$

によって、定数倍を除いて定義される。この複雑な定義式は、(2.12) 型の性質が成立するように決められている：

$$\alpha_m^n(\lambda)\, \omega_m^n = K^{(l_m)}(\lambda + \eta)\, \omega_m^{n-1},$$

$$(4.7)\qquad \delta_m^n(\lambda)\, \omega_m^n = -K^{(l_m)}(-\lambda - \eta)\, \omega_m^{n+1},$$

$$\gamma_m^n(\lambda)\, \omega_m^n = 0.$$

但し、$K^{(l)}(z) = 2\exp\left(\frac{4\pi i l\eta}{\tau}(z - \eta)\right)\theta_{11}(z + 2l\eta)$。

(4.7) を示すには次のようにする。例えば $\gamma_m^n(\lambda)$ の $f(v) \in V_{l_m}$ への作用は、(3.5) から分かるように、

$$(\gamma_m^n(\lambda) f)(v) = \frac{C}{\theta_{11}(2v)}\left(\Gamma_+(v) f(v+\eta) - \Gamma_-(v) f(v - \eta)\right)$$

のような、一種の差分商の形に表わされる。ここで C は v によらない定数である。(3.5), (4.1), (4.4) から具体的に $\Gamma_\pm(v)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+(v) = \text{const.}\,\times &\\
&\times\ \theta\left(v+\frac{S}{2}+\frac{\tau}{4}+\left(2\ell m-3\ell+n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)\\
&\times\ \theta\left(v-\frac{S}{2}-\frac{\tau}{4}-\left(2\ell m+\ell+n+\frac{1}{2}\right)\eta\right)\\
&\times\ \theta\left(v+\frac{S}{2}+\frac{\tau}{4}+\left(2\ell m-\ell+n-\frac{1}{2}\right)\eta-\lambda\right)\\
&\times\ \theta\left(v-\frac{S}{2}-\frac{\tau}{4}-\left(2\ell m-\ell+n-\frac{1}{2}\right)\eta+\lambda\right),
\end{aligned}
$$

$$\Gamma_-(v) = \Gamma_+(-v)$$

となり、これから ω_m^n (又は $\tilde{\omega}_m^n$) に作用させると 0 になることが分る。Γ_+ を求めるには、Riemann の関係式，例えば

$$
\begin{aligned}
&\theta_{00}(x)\,\theta_{00}(y)\,\theta_{00}(u)\,\theta_{00}(v)+\theta_{01}(x)\,\theta_{01}(y)\,\theta_{01}(u)\,\theta_{01}(v)\\
&+\theta_{10}(x)\,\theta_{10}(y)\,\theta_{10}(u)\,\theta_{10}(v)+\theta_{11}(x)\,\theta_{11}(y)\,\theta_{11}(u)\,\theta_{11}(v)\\
&=2\,\theta_{00}\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta_{00}\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right)
\end{aligned}
$$

や、Landen 変換

$$\theta_{01}(2z,2\tau)=\frac{\theta_{01}(0,2\tau)}{\theta_{00}(0,\tau)\,\theta_{01}(0,\tau)}\,\theta_{00}(z,\tau)\,\theta_{01}(z,\tau)$$

および、テータ関数の modular 変換性，例えば

$$\theta_{11}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)=-i\,(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\pi i}{\tau}z^2\right)\theta_{11}(z)$$

などを使って長い計算を行う。α_m^n, δ_m^n の作用については、上で C, const. と書いた部分も重要である。(題材はすでに10年も前の話 ([Takhtajan-Faddeev], [Sklyanin]) なのに、今まで誰も手をつけていなかったのは、ひとえにこの計算の面倒さ

に原因があるのであろう。)

local vacuumが分れば、後の手続きは§2と同じである。

(4.8) $$n_m := n + 2\sum_{k=1}^{m-1}(l_k - l_m)$$

とすると、$\mathcal{T}(\lambda)$のgauge変換は、

(4.9) $$\mathcal{T}(\lambda) \longmapsto \mathcal{T}^n(\lambda) = \begin{pmatrix} A^n(\lambda) & B^n(\lambda) \\ C^n(\lambda) & D^n(\lambda) \end{pmatrix} := L_N^{n_N}(\lambda)\cdots L_1^{n_1}(\lambda) = M_{2l_N N+n_N}^{-1}\,\mathcal{T}(\lambda)\,M_{n_1}$$

で定義され、A^n, C^n, D^nは、

(4.10) $$\Omega^n(s) = \omega_1^{n_1}(s)\otimes\cdots\otimes\omega_N^{n_N}(s) \in \mathfrak{h} \qquad n\in\mathbb{Z}$$

に次のように作用する。

(4.11) $$\begin{aligned} A^n(\lambda)\,\Omega^n &= K^{(l_1,\cdots,l_N)}(\lambda+\eta)\,\Omega^{n-1}, \\ D^n(\lambda)\,\Omega^n &= (-1)^N K^{(l_1,\cdots,l_N)}(-\lambda-\eta)\,\Omega^{n+1}, \\ C^n(\lambda)\,\Omega^n &= 0 . \end{aligned}$$

ここで、$K^{(l_1,\cdots,l_N)}(z) = \prod_{k=1}^{N} K^{(l_k)}(z)$ である。

前と同様に、

(4.12) $$\mathcal{T}_{k,k'}(\lambda) = M_k(\lambda;s,t)^{-1}\,\mathcal{T}(\lambda)\,M_{k'}(\lambda;s,t) = \begin{pmatrix} A_{kk'} & B_{kk'} \\ C_{kk'} & D_{kk'} \end{pmatrix}$$

を導入し、

(4.13) $$\Psi_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_M) = B_{n+1,n-1}(\lambda_1)\cdots B_{n+M,n-M}(\lambda_M)\,\Omega^{n-M}$$

として、

(4.14) $$\Psi_\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n\theta}\,\Psi_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_M)$$

型の$T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda) = A_{k,k}(\lambda) + D_{k,k}(\lambda)$の固有ベクトルを探す。$\mathcal{T}^n(\lambda) = \mathcal{T}_{2l_N N+n_N,\, n_1}(\lambda)$, $2l_N N + n_N - n_1 = 2\,l_{total}$ ($l_{total} = \sum_{m=1}^{N} l_m$) で

あるから、(2.18) の前の議論と同様に、今度は $M=l_{total}$ とする (l_{total} が整数になると仮定する)。ポイントは、同じR行列 (1.7) を使っているため、$A_{k,k'},\cdots,D_{k,k'}$ の間の交換関係は、前と同じ(2.17)である、ということである。

以上から、§2と同じ方法で、次の結果を得る。([Takebe])

$\Psi_\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_M)$ ($M=l_{total}$) は、$\lambda_1,\cdots,\lambda_M$ が

$$\frac{K^{(l_1,\cdots,l_N)}(\lambda_j+\eta)}{(-1)^N K^{(l_1,\cdots,l_N)}(-\lambda_j-\eta)} = e^{-4\pi i\theta}\prod_{k=1,k\neq j}^{M}\frac{\alpha(\lambda_k,\lambda_j)}{\alpha(\lambda_j,\lambda_k)} \quad (j=1,\cdots,N) \tag{4.15}$$

を満たす時、$T(\lambda)$ の固有ベクトルで、固有値は、

$$\begin{aligned} &e^{2\pi i\theta}K^{(l_1,\cdots,l_N)}(\lambda+\eta)\prod_{k=1}^{M}\alpha(\lambda,\lambda_k) \\ &+(-1)^N e^{-2\pi i\theta}K^{(l_1,\cdots,l_N)}(-\lambda-\eta)\prod_{k=1}^{M}\alpha(\lambda_k,\lambda) \end{aligned} \tag{4.16}$$

である。

§ 参考文献

Mumford D.: Tata Lectures on theta I (Birkhäuser) (1983).

Sklyanin E. K.: Func. Anal. Appl. 16-4 (1982) pp 263-270;
Func. Anal. Appl. 17-4 (1983) pp 273-284.

Takhtajan (Takhtadzhan) L. A., Faddeev L. D.: Russian Math. Surveys 34:5 (1979) pp 11-68.

Takebe T.: Generalized Bethe Ansatz with the general spin representations of the Sklyanin algebra, J. of Phys. A. (to appear)