数理解析研究所講究録
第810巻 1992年 39-42

完全可積分系のdistribution解の可解性について.

北大理 本多 尚文

1. 本稿では、不確定特異点型のholonomic systemの超関数解の構造について、得られた結果を紹介する。まず、常微分方程式 P(≠0) についての結果を思いだすと、Pはhyperfunctionのcategoryで全射である。この証明は、非常に簡単であると伴に、hyperfunctionで考える事の透明性を示している。
しかし、「Pはdistributionで全射か」と言う問題は、かなり難しい問題である。これは、Malgrangeによって正しい事が証明されているが、その証明は、C^∞ classの漸近解の存在を用いた、かなりのstepを必要とするものである。著者は、この問題を、~~正則~~境界値を与える正則解を構成する事で、「ultra-distribution」の場合も正しい事を示した。
さて、この問題を多変数の場合に考察するために、まず hyperfunctionの時、どの様な結果があるか list upすると:

<u>定理1</u> (Schapira)

$M \hookrightarrow X$: 実解析多様体とその複素化.

$\mathfrak{M}$: 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群

この時 $\mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M) = 0$ $\boxtimes$

ただし. $\mathcal{B}_M$ は hyperfunction の層.

<u>定理2</u> (Honda-Schapira の系)

$N_i \subset M$: N_i は closed analytic subsets of M

$\mathfrak{M}$ は holonomic system で. $\pi(\mathrm{char}(\mathfrak{M})) \subset \bigcup N_i^{\mathbb{C}}$ とする.

この時 $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{B}_M) = 0$ $(i \geqq 1)$ $\boxtimes$

ここで $\pi : T^*X \setminus T^*_X X \to X$, $N_i^{\mathbb{C}}$ は N_i の複素化.

もちろん. $\dim X = 1$ の時は. 定理1.2 共に. hyperfunction で全射と言う事実と同値になる.

従って. 定理1.2の $\mathcal{B}_M$ を distribution の層 $\mathcal{D}b_M$ に置き換えた時. 類似の結果が成立する事が期待される.

しかし. ここで注意しなくてはいけない事は. 定理1.2は. $\mathcal{B}_M$ の超越性により. $\mathfrak{M}$ が確定特異点型の場合のみを考えれば良いと言う点である.

$\mathcal{D}_{6.M}$の時は、この様な事は全く言えない上に、解の構造がStokes lineの影響で、複雑になっている。

2. $\mathcal{D}_{6.M}$の場合を考える為に、次の最も基本的な完全積分可能系を考える事とする。

以下、$\mathbb{C}^n = (z_1, \cdots, z_n)$として、原点の近傍で考える。

$$\mathfrak{M} : \left(z_i^{d_i} D_{z_i} - A_i(z) \right) \vec{u} = 0 \quad , \quad 1 \leqq i \leqq n .$$

ただし、$d_i \in \mathbb{N}$, $A_i \in gl(l; \mathcal{O}_0)$とし、完全可積分条件を満たすものとする。

この時得られる結果は、

<u>定理3</u>

$\mathfrak{M}$は上に与えた完全可積分系として

$$\mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{D}_{6.M}) = 0 \qquad \square$$

更に、A_iに条件を入れると、

<u>定理4</u>

各$A_i(0)$の固有値が、すべて異なっているならば

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{D}_{6.M}) = 0 \qquad (i \geqq 1) \qquad \square$$

が言える。

証明は十分小さな角領域での解の構成を行い、更に、適当な代表元を選びなおす事で、構成した角領域上の解を境界値がdistributionを与える様、増大度を保ちながら広げると言う2つのStepよりなる。詳細は準備中の論文をみていただきたい。

[1] Honda-Schapira : On the vanishing theorem of Holonomic modules with positive characteristic varieties R.I.M.S, (1991).

[2] Honda : On the soluability of ordinary differential equations in the space of distributions. J. Fac. sci. Univ. Tokyo 39. (1992).