

問題集

(編) 津田塾大 宮崎 桂 (Katura Miyazaki)

§1 Twisting

§2 Unknotting operation

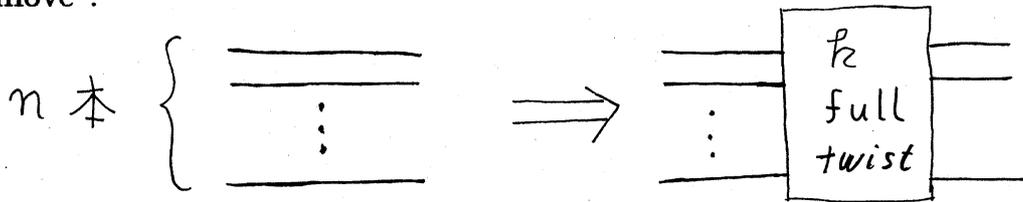
§3 4次元多様体, S^4 内の曲面

§4 3次元多様体, 結び目

§5 その他

ここでよく使われる, 結び目の local move.

(n, k) -move :



結び目 K が結び目 K' に (n, k) -move 1 回で移るとき $K \xrightarrow{(n, k)} K'$ と書く.

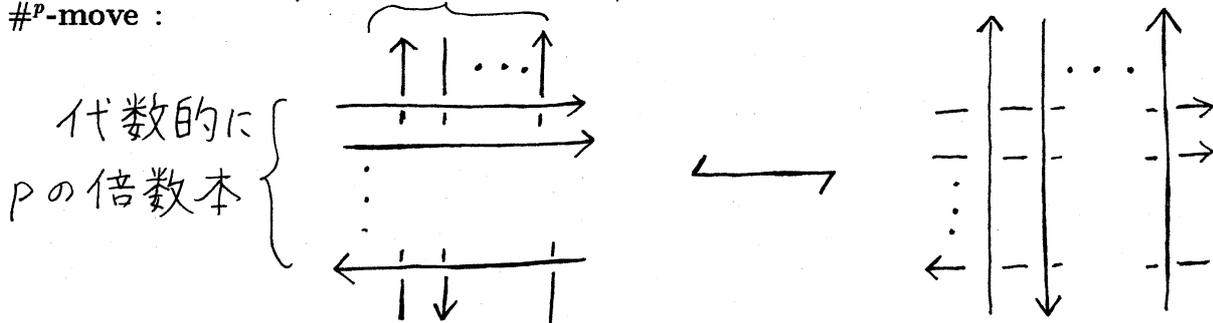
結び目 K に対しどんな $k, n \in \mathbb{Z}$ をとっても

$$K \xrightarrow{(n, k)} 0, \text{ a trivial knot}$$

と書けないとき, K は twisting でほどけないという.

代数的に p の倍数本

p -move :



self-#(I)-move : 絡み目の同じ成分どうして #-unknotting operation を行う絡み目の local move.

$T(p, q)$ は (p, q) トーラス結び目を表す.

1 Twisting

1.1. (大山)

結び目 K と L が次の列で結ばれるとき $K \sim L$ と書く.

$$K \cong K_1 \xrightarrow{(n_1,2)} K_2 \xrightarrow{(n_2,2)} \dots \xrightarrow{(n_m,2)} K_{m+1} \cong L \quad \text{各 } n_i \text{ は奇数}$$

K で結び目全体を表すとき, 同値類の個数 $\#(K/\sim)$ は無限か?

その後の発展. 答は Yes. (横田, 宮崎)

n が奇数で k が偶数のとき, (n, k) -move は結び目の determinant を変えない.

よって $\#^m T(2, 3)$ と $\#^\ell T(2, 3)$ は $m \neq \ell$ のとき同値ではない. なお, 上の事実は横田による Jones 多項式の twisting formula を用いても, Goeritz matrix を調べても示せる.

1.2. (大山)

事実. 全ての結び目 K は適当な $n \in \mathbb{Z}$ をとると $K \xrightarrow{(n,1)} K' \xrightarrow{(n-1,-1)} 0$ という列を持つ.

問題. 任意の結び目 K に対し, 適当な m, n と適当な K' を選ぶと次の列が成立するか?

$$K \xrightarrow{(m,\pm 1)} K' \xrightarrow{(n,\pm 1)} 0 \quad \text{複号同順でなくても良い.}$$

注意 1. m と n が互いに素ではない, という条件をつけると上のような列を持たない K をみいだせる.

2. $4_1 \xrightarrow{(m,1)} K' \xrightarrow{(n,-1)} 0$ となる奇数 m, n は存在しない.

1.3.

(a) (大山) 軟派 knot は存在するか?

K : 軟派 knot $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 結び目 K は twisting でほどけないが, ある結び目 K' との連結和 $K \# K'$ は twisting でほどくことができる.

注意. 2-bridge knot K で, twisting でほどけないものがあれば, K は軟派 knot.

($K' = -K!$ とすればよい.)

(b) (中西) 硬派 knot は存在するか?

K : 硬派 knot $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 結び目 K は twisting でほどけず, どんな結び目 K' との連結和 $K \# K'$ もやはりほどけない.

twisting でほどけない結び目の例.

- $T(2, 75) \# k$ ここで k は任意の slice knot (安原)

- $T(2, 45) \# k'$ ここで k' はアレクサンダー多項式が 1 の slice knot (宮崎)

- $K_m = \partial(S_1 \natural_b S_2)$ はほどけない (宮崎)

ただし, S_1, S_2 は各々 $T(2, 3), T(2, 4m - 1)$ の Seifert surface で球面で分離されている. b は S_1 と S_2 を結ぶ band で $\text{int}b \cap S_i = \emptyset$ となるもの. \natural_b は band b を介した境界連結和. m の条件は, $m \equiv 1 \pmod{3}, m > 1, 2m + 1$ は平方数でない. たいの band に対し K_m は prime knot.

- 次の 3 条件を満たす結び目 K , 例えば 3 個以上奇数個の figure eight knot の連結和 (安原)

(1) 全ての p について $\sigma_p(K) = 0$, (2) $\text{Arf}(K) = 1$, (3) $H_1(X)$ の生成元の最小数が 3 以上. ただし σ_p は Tristram の p -signature, X は S^3 の K にそった 2-fold branched covering を表す.

1.4(a). (寺垣内)

K_1, K_2 をともに satellite knot とすると $K_1 \# K_2$ を twisting でほどくことができるか?

事実 1. 一方が satellite knot のときは, ほどける結び目の例がある.

2. (torus knot) $\#$ (prime knot) あるいは (2-bridge knot) $\#$ (prime knot) のタイプではほどける例が無数にある. ほどけることがわかっている結び目の例はこれらのタイプのみ.

(b) (中西)

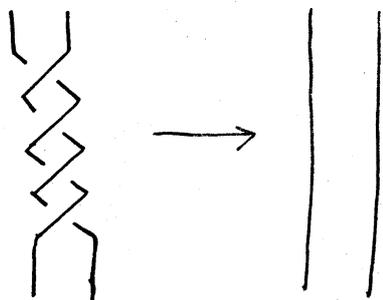
(a) の条件をゆるめて, $\exists K_1, \exists K_2$ を 2-bridge knot でも torus knot でもないとする.

このとき $K_1 \# K_2$ は twisting でほどけるか?

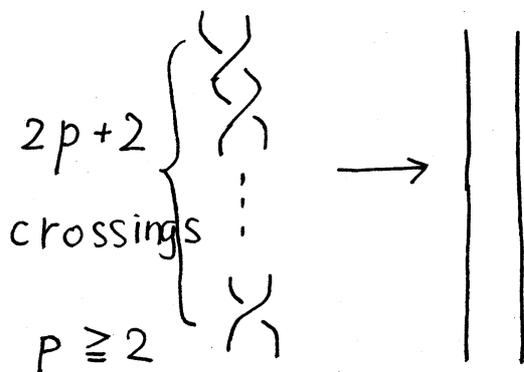
(c) (寺垣内, 茂手木)

結び目 $K_1 \# \dots \# K_n$ (K_i prime knot, $n \geq 3$) で twisting でほどけるものはあるか?

注意.



によって (1回), ほどける結び目 k は $k\#T(2, -3)$ が twisting 1 回でほどける.



によって (1回), ほどける結び目 k は $k\#T(p, p+1)$ が twisting 1 回でほどける.

1.5. (茂手木) Unknotted solid torus の twisting

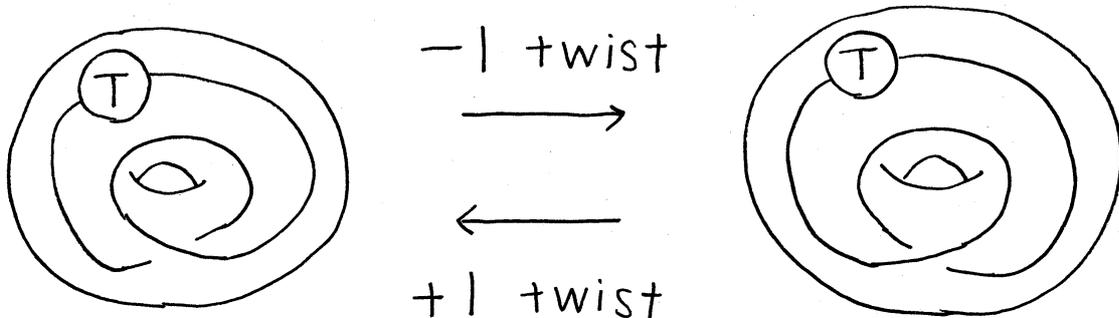
$V \subset S^3$, standard solid torus

K : V 内の結び目で $\text{wrap}_V(K) \geq 2$

$f_n : V \rightarrow V$, n -twisting homeomorphism

問題. ある $n \neq 0$ に対し $K \cong f_n(K)$ (S^3 の結び目として) のとき (V, K) はどうなるか?

予想. $\text{wrap}_V(K) = 2$ で, さらに以下のタイプのみ.



事実 1. [河野-渋谷-茂手木] [Mathieu] K が S^3 の trivial knot なら上の予想は正しい.

2. Litherland の signature 公式より, 次の場合 K と $f_n(K)$ はコボルダント

ではない: $\text{wind}_V(K) \geq 3$, または $\text{wind}_V(K) = 2$ かつ $n \geq 2$.

注意. (金信) skein 多項式で考えても難しい問題. 2-component trivial link と同じ skein 多項式を持つ 2-component link があるか? という問題と同じことになる.

2 Unknotting operation

2.1. (中西)

unknotting operation の type を 1 つとる. 任意の amphicheiral knot K に対し, amphicheiral knot の列 K_1, \dots, K_n をとって次が成立するようにできるか?

$$K \rightarrow K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_n \rightarrow 0, \text{ 各 } \rightarrow \text{ では unknotting operation を 2 回施す}$$

注意. K : strongly amphicheiral knot なら, 必ず上のような列はある.

2.2. (細川, 渋谷) unknotting number と #-unknotting number

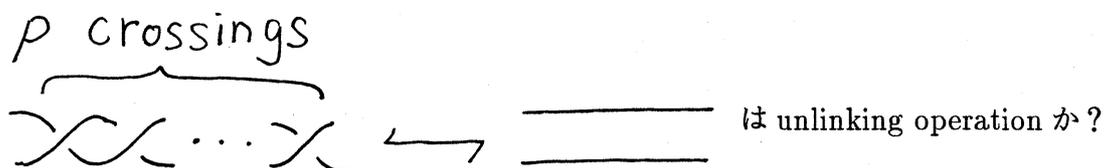
$u(K) = n$ とする. このとき変えられた n 個の crossing の内 positive crossing の数を p , negative crossing の数を q とする. p, q は n 交点の選び方に依存する. このとき $u^\#(K \text{ の } (2,1)\text{-cable}) = n + \min |p - q|$?

注意 1. $\leq 2n$ は正しい. 等号は必ずしも成立しない, しかし $u(K) = 1$ のときは

$$u^\#(K \text{ の } (2,1)\text{-cable}) = 2.$$

$$2. u^{\#p}(K \text{ の } (p,1)\text{-cable}) = 1.$$

2.3. (中西)



注意 1. p が偶数のときは $|p| \geq 4$ では不可能. E.g. Borromean rings は Fox's congruence mod(2,2) で trivial link にならない.

2. $p \neq 1$ かつ素数でない, とき不可能.

3. $p = 5$ などの素数でも多分不可能. $p \neq 3$ での候補: Hopf link.
4. $p = 3$ のときは (否定的に解決されている) Montesinos 予想の変形.

2.4. (中西)

2.5. (茂手木) mutation と unknotting number

結び目の mutation は unknotting number をかえるか? i.e. k と k' を互いに mutant な結び目とする. このとき, $u(k) = u(k')$? $u^\#(k) = u^\#(k')$?

注意. $u^\#(k) \equiv u^\#(k') \pmod{2}$

2.6. (渋谷) boundary link

事実. boundary link は self- $\#(I)$ -move を繰り返すと trivial link になる.

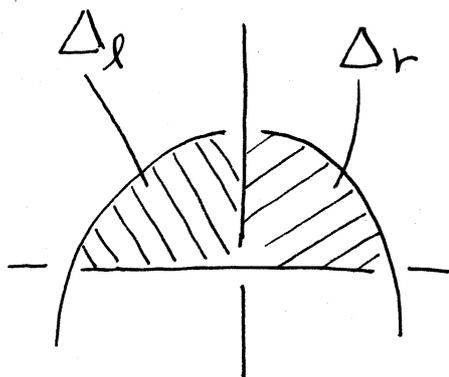
問題. $\ell = k_1 \cup \dots \cup k_n$: Z_2 -boundary link s.t. $\text{lk}(k_i, k_j) = 0, i \neq j$ とすると, ℓ に self- $\#(I)$ -move を繰り返し施して trivial link にかえられるか?

注意. 2-component link については正しい.

2.7. (内田) Δ -unknotting operation (1)

事実. Δ -unknotting operation を施す箇所 of up to homeo. による同値類の数は無限個.

問題. さらに次のような操作も同一視すると同値類は有限個になるか?



Δ_l に施す Δ -unknotting operation
と Δ_r に施す Δ -unknotting operation
を同一視する.

2.8. (内田) Δ -unknotting operation (2)

K を $u^\Delta(K) = 1$ の結び目とする. Δ', Δ'' を各々 K を trivial knot にかえる Δ -unknotting operation とする. このとき Δ' と Δ'' は 2.7 の列の操作で移りあうか?

3 4次元多様体, S^4 内の曲面3.1. (佐藤) Exotic 4-manifold

M^4 を smooth, ホモロジー 4 球面で $\pi_1(M)$ の weight=1 とする, i.e. \exists weight element $x \in \pi_1(M)$ s.t. $\pi_1(M)/\langle x \rangle = 1$, ここで $\langle * \rangle$ は normal closure. M^4 の weight element を surgery してえられる smooth 4-manifold は, $S^2 \times S^2$ または $CP^2 \# \overline{CP^2}$ の exotic な微分構造を与えるか? 特に, M^4 が $\pi_1(\Sigma)$ の weight=1 で $\mu(\Sigma) \neq 0$ であるホモロジー 3 球面 Σ の spun ホモロジー 4 球面のときはどうか?

注意.

1. ホモロジー 3 球面 Σ を S^3 内の結び目 K (どんなものでも可) の $1/2n$ -Dehn surgery で得られるものとする. Σ の spin であるホモロジー 4 球面を surgery するときに選ぶ circle として, Dehn surgery の solid torus の core をとると, 得られる smooth 4-manifold は $S^2 \times S^2$ に diffeo であることがわかる. もちろん $\mu(\Sigma) = 0$.
2. $\Sigma = \Sigma(2, 3, 5)$ の spin であるホモロジー 4 球面を surgery して exotic $S^2 \times S^2$ が得られれば, Scharlemann の例は exotic $S^3 \times S^1 \# S^2 \times S^2$ を与えることになる.

3.2. (鎌田)

以下 $m \geq 3$

$F_m: \{s_1, \dots, s_{m-1}\}$ が生成する rank= $m-1$ の自由群.

$B_m: s_1, \dots, s_{m-1}$ を標準的生成元とする m -braid 群,

i.e. 関係式は, $s_i s_j^{-1}, |i-j| > 1$ と $s_i s_j s_i s_j^{-1} s_i^{-1} s_j^{-1}, |i-j| = 1$

$p: F_m \rightarrow B_m$ は自然な射影.

事実. $\omega \in F_m$ が $p(\omega) = 1$ のとき, 次の操作 (1)(2)(3) を有限回繰り返して word ω を empty word にできる.

- (1) $(s_i s_i^{-1})^{\pm 1}$ を word から除く, あるいは入れる.
- (2) $[s_i, s_j]^{\pm 1}, |i - j| > 1$ を word から除く, あるいは入れる.
- (3) $(s_i s_j s_i s_j^{-1} s_i^{-1} s_j^{-1})^{\pm 1}, |i - j| = 1$ を word から除く, あるいは入れる.

問題. $\omega \in F_n$ が $p(\omega) = 1$ のとき

$\chi(\omega) = \min\{\omega$ を empty word にする操作の列に現れる操作 (3) の数 $\}$ を下から評価せよ.

注意 1. χ は trivial m -braid の射影図が与えられたとき, それを交点なしの射影図に変形するのに必要な, Reidemeister III move の回数の最小数とみなせる.

2. χ は 2次元 braid $\subset D^2 \times D^2$ を 3次元へ射影したときできる triple point の数と関係している.

以下は 3.3, 3.4 で使われる記号

closed smooth 4-manifold M に対し $\text{punc}M = M - \text{int}B^4$

結び目 K が closed smooth 4-manifold M で slice とは, $K \subset \partial(\text{punc}M)$ とみたとき, K が $\text{punc}M$ に埋め込まれた適当な smooth disk の境界になること.

$\text{Slice}(M) = M$ で slice になる結び目の集合.

3.3. (安原)

予想 $\text{Slice}(CP^2 \# CP^2)$ に含まれない結び目がある.

注意 1. $\text{Slice}(S^2 \times S^2) = \text{Slice}(CP^2 \# \overline{CP^2})$
 $=$ 全ての結び目

2. $\text{Slice}(CP^2)$ に含まれない結び目は無限にある.

3. topologically locally flat category では全ての結び目は $CP^2 \# CP^2$ で slice.

3.4. (安原)

(a) 結び目 $K \subset \partial D^4$ に対し, nonorientable 4-genus $\gamma^*(K)$ を K が D^4 内で張る nonorientable smooth surface の第 1 ベッチ数の内で最小のものと定義する.

問. $\forall n, \exists K$ をとると $\gamma^*(K) \geq n$ とできるか?

(b) $K \subset \partial D^4$ とする. 上の $\gamma^*(K)$ の定義で smooth を topologically locally flat に弱めて, nonorientable topologically locally flat 4-genus $\widetilde{\gamma}^*(K)$ を定義する.

根拠のない予想. $\tilde{\gamma}^*(K) \leq 2$

事実. 任意の結び目 $K \subset \partial(\text{punc}CP^2)$ は topologically locally flat な Moebius band を $\text{punc}CP^2$ 内に張る.

問. (鎌田) 任意の K は smooth な Moebius band を $\text{punc}CP^2$ 内に張るか?

3.5. (中西)

2-knot に対する unknotting operation を考えよ.

注意 1. 2-knot に 1-handle をいくつかつける (i.e. 1-surgery する) と unknotted surface になる. [Hosokawa-Kawauchi]

2. [Giller] による “crossing change” を繰り返すと, 2-knot は unknotted S^2 になる. ただしこの “crossing change” の結果, embedded S^2 は immersed S^2 になるかもしれない.

以下 3.6—3.8 は S^4 内の knotted torus T の群の問題; $X = S^4 - \text{int}N(T)$.

3.6. (金信) peripheral subgroup

$Z^3 \cong \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$ の image を peripheral subgroup $P(T)$ という. 任意の m, n に対して $P(T) \cong Z \oplus Z_m \oplus Z_n$ となる torus $T \subset S^4$ を構成せよ.

注意. $T=(2\text{-knot})+(1\text{-handle})$ のとき $Z \oplus Z_n$ は実現できる. $P \cong Z^3$ となる例もある. [Asano] [Litherland]

3.7. (金信) $\pi_1(X)$ の center を特徴づけよ.

注意 1. $T=(6\text{-twist spun trefoil})+(1\text{-handle})$ のとき center = $Z \oplus Z_n$.

2. 高次元結び目 ($S^n \subset S^{n+2}, n \geq 3$) では, 任意の有限生成アーベル群は結び目群の center になりうる. (Kervaire-Hausmann)

3.8. (金信) $\pi_1(X)$ の commutator subgroup を特徴づけよ.

注意 1. $\exists T=(2\text{-knot})+(1\text{-handle})$ s.t.

commutator subgroup $\cong \langle a, b | a^p = b^q = (ab)^r = 1 \rangle$.

ただし p, q は奇数. この条件のもとで p, q, r は自由に選べる.

E.g. $p = 5, q = 3, r = 2$ のとき, これは5次の交代群.

- 2-knot については, 結び目群の commutator の内有限群になるものは Hillman, 吉川によって決定されている.

4 3次元多様体, 結び目

4.1. (西) Tangle の height

n -tangle (B, t) が height h を持つとは, 任意の connected essential surface $S \subset B - \text{int}N(t)$ が $-\chi(S) \geq h$ をみたすこと. 任意の h に対し, height= h となる tangle を目に見えるように構成せよ.

注意.

1. 抽象的には構成できる. [Kobayashi-Nishi] の Proposition 3.1 を参照. そこでの height の定義はやや異なる.
2. 目標は, 任意の closed orientable 3-manifold M^3 内に g -characteristic knot K (i.e. $M^3 - \text{int}N(K)$ 内の genus g 以下の incompressible surface は $\partial N(K)$ に parallel なもののみになるような結び目) を具体的に作ること.

4.2. (宮崎) Simple Loop Conjecture

F^2 : closed surface, M^3 : closed 3-manifold $f: F^2 \rightarrow M^3$ は 2-sided 連続写像.

問題. F 上の全ての essential simple loop ℓ に対しその像 $f(\ell) \subset M^3$ がやはり essential loop ならば $f_*: \pi_1(F^2) \rightarrow \pi_1(M^3)$ は単射か?

注意 1. f が埋め込みならループ定理より, 答は Yes.

2. 2-sided をはずせば, f が埋め込みであっても反例がある,

e.g. $RP^1 \times S^1 \subset RP^2 \times S^1$.

3. M^3 が Seifert fibered space なら, minimal surface の議論により Yes [Hass].

この事実をトポロジカルに証明できないか?

4. f を曲面から曲面への 2-sided とは限らない連続写像にして同じことを考えると,

答は Yes [Gabai]. 証明は初等的.

4.3. (茂手木) Dehn surgery と Seifert fibered space

事実 1. iterated torus knot の Dehn surgery でえられる Seifert fibered space は,
exceptional fiber の数が 3 本以下.

2. 適当な torus knot 2 つの連結和の Dehn surgery で exceptional fiber 4 本の
Seifert fibered space がえられる.

問題. 結び目の Dehn surgery で exceptional fiber を 5 本以上持つ
Seifert fibered space がえられるか?

4.4. (河野)

knot exterior をトーラス分解したときの hyperbolic piece になる hyperbolic manifold を特徴づけよ. あるいはその性質を調べよ.

4.5. (林) Knotted solid torus の twisting の拡張

F を S^3 の knot K の exterior に含まれる種数 ≥ 2 の closed incompressible surface とする. D を F の compressing disk で, 境界を固定した D の isotopy の範囲で $\min \#(D \cap K) \geq 2$ のものとする. ∂D に沿った $1/n$ -Dehn surgery で K から得られる結び目を K_n と書くと任意の $n \neq 0$ に対して $K_n \cong K$ か?

注意. F の種数が 1 なら任意の $n \neq 0$ に対し $K_n \cong K$ (ambient isotopic でない).

[河野-渋谷-茂手木]

4.6. (宮崎) Strongly negative amphicheiral knot

事実. (1) K : negative amphicheiral knot

$\Rightarrow K$: strongly negative amphicheiral knot,

は一般には誤り. [Whitten] [Hartley]

(2) K が simple knot なら上の \Rightarrow は正しい.

問題. K が satellite knot のとき, \Rightarrow の成立する条件を K のコンパニオンとパタンの言葉で記述せよ.

注意. 同様の問題は, invertible \Rightarrow strongly inv. についても考えられる. 上の (1),(2) に対応する命題はこの場合も成立する. 上の問に対応する問の答は次の通り:

[Boileau] K が次の性質 (*) を満たす invertible knot なら, K は strongly invertible:

(*) K はパタンの winding number が 0 になるような衛星型結び目表示をもたない.

4.7. (作間)

I_p : p -fold irregular simple dihedral branched covering of a knot $K \subset S^3$,

i.e. \exists 表現: $\pi_1(S^3 - K) \rightarrow D_p$, 整 p 角形の対称群

meridian \mapsto 折り返し

に対応する branched covering.

Σ_2 : K の 2-fold branched covering

このとき, $\beta_1(\Sigma_2) - 1 \leq \beta_1(I_p) \leq \frac{p-1}{2}(\beta_1(\Sigma_2) - 1)$ か? ただし $\beta_1(X) = \dim H_1(X; \mathbb{Z}_p)$.

注意 1. $p = 3$ の時は正しい.

2. Montesinos knot に対しては多分正しい.

3. K が 2-bridge knot のとき, 左の等号が成立.

4. Montesinos knot に対して左の等号が成立しないことがある.

4.8. (渋谷) \mathbb{Z}_2 -boundary link

(a) \mathbb{Z}_2 -boundary link の mutant は \mathbb{Z}_2 -boundary link か? (Cf. 2.6.)

注意 1. 2-component link なら正しい [Jin-Ko].

2. \mathbb{Z}_2 をとるとまちがいがい [Jin-Ko].

3. mutant な link どうしは self-#(I)-move でうつりあう.

(b) ribbon link は \mathbb{Z}_2 -boundary link か?

注意. 2-component link なら正しい (Hillman).

4.9. (宮崎) 0-surgery と knot cobordism

K を oriented S^3 内の oriented knot とする. K の 0-surgery M_K は oriented 3-manifold.

$H_1(M_K)$ の generator α_K は K の向きから一意に決められる. もし $\exists f: M_K \rightarrow M_L$ が向

きを保つ homeo で $f_*(\alpha_K) = \alpha_L$ ならば K と L はコボルダントか?

注意 1. 向きに関する制約を忘れれば反例がある：

$\exists K$ s.t. K と $-K$ (K の向きを逆にしたもの) はコボルダント

でない. [Livingston].

この例は, [Kirby 問題集] の Problem 1.19(Akbulut-Kirby) への否定的解答.

2. homotopy $B^4 = B^4$ ならば K が slice のとき答は Yes.

5 その他

5.1. (河野)

仮定. K : simplicial complex (n 次元で $|K| =$ 多様体としてもよい.)

$K \triangleright L$: 細分を表す.

問 1. $K \triangleright L_1, K \triangleright L_2$ のとき, L_1 から L_2 へ星状細分とその逆の列で移れるか?

注意 1. Alexander は modulo simplicial isomorphism でこれを示している.

(途中 K 等を simplicial isom. なものにとりかえてよい.)

2. $n = 2$ のときは正しい.

問 2. (Hudson?) $K \triangleright L_1, K \triangleright L_2$ のとき共通星状細分は存在するか?

参考文献

[Asano] K. Asano; A note on surfaces in 4-spaces, *Math. Sem. Notes*, Kobe University 4(1976), 195-198.

[Boileau] M. Boileau; Nœuds rigidement inversibles, *Low dimensional topology*, London Math. Soc. Lect. Note 95(1985), 1-18, Cambridge Univ. Press.

[Gabai] D. Gabai; The simple loop conjecture, *J. Diff. Geometry*, 21(1985), 143-149.

[Giller] C. Giller; Towards a classical knot theory for surfaces in R^4 , *Illinois J. Math.* 26(1982), 591-631.

[Hartley] R. Hartley; Knots and involutions, *Math. Z.* 171(1980), 175-185.

- [Hass] J. Hass; Minimal surfaces in manifolds with S^1 actions and the simple loop conjecture for Seifert fibered spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 99(1987), 383-388.
- [Hosokawa-Kawauchi] F. Hosokawa and A. Kawauchi; Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, *Osaka J. Math.* 16(1979), 233-248.
- [Jin-Ko] G. Jin and K. Ko; *Boundary links and mutation*, to appear in *Canad. Math. Bull.*
- [Kirby 問題集] R. Kirby; Problems in low dimensional topology, *Algebraic and geometric topology*, Proc. Symp. Pure Math. 32(1978), 273-312, Amer. Math. Soc.
- [Kobayashi-Nishi] T. Kobayashi and H. Nishi; *A necessary and sufficient condition for a 3-manifold to have genus g Heegaard splitting (A proof of Hass-Thompson conjecture)*, preprint.
- [河野-渋谷-茂手木] M. Kouno, K. Motegi and T. Shibuya; Twisting and knot types, *J. Math. Soc. Japan* 44(1992), 199-216.
- [Litherland] R. Litherland; The second homology of the group of a knotted surface, *Quart. J. Math.* 32(1981), 425-434.
- [Livingston] C. Livingston; Knots which are not concordant to their inverses, *Quart. J. Math.* 34(1983), 323-328.
- [Mathieu] Y. Mathieu; Unknotting, knotting by twists on disks and property (P) for knots in S^3 , *Knots 90*, Walter de Gruyter, 1992, 93-102.
- [Whitten] W. Whitten; Inverting double knots, *Pacific J. Math.* 97(1981), 209-216.