

周期倍分岐中およびその後の安定・不安定多様体の構造変化 (散逸 2 次元写像)

国立天文台 谷川清隆 (Kiyotaka Tanikawa)
帝京技科大 山口喜博 (Yoshihiro Yamaguchi)

1. 序

Benedicks and Carleson^[1]はあるパラメーター範囲において Hénon 写像のストレンジアトラクターが 2^n 分岐の母不動点の不安定多様体の閉包であることを証明した. これはストレンジアトラクターの正体に関する年来の疑問に答えるものであった. ところで、Hénon 写像の場合、数値計算によれば、ストレンジアトラクターは 2^n 分岐終了後に現れ、島融合 (island-merging) 過程を経て、クライシス (crisis) によって消滅する^[2]. Benedicks and Carleson はクライシス直前のストレンジアトラクターが 2^n 分岐の母不動点の不安定多様体の閉包であることを示したのである. ストレンジアトラクターは島融合によって構造を変えていく. アトラクターの成分が複数なら、母不動点の不安定多様体の閉包では有り得ない. したがって、島融合の途中のストレンジアトラクターは何かという問題が残っている.

さて、われわれは安定多様体・不安定多様体の構造変化に興味を持っている. 一般に力学系の構造は安定多様体・不安定多様体のホモクリニック・ヘテロクリニック交差の増加と共に複雑になっていく. ホモクリニック・ヘテロクリニック交差はホ

モクリニック・ヘテロクリニック接触を経て生じる．この接触は交差が生じた後にも起こるが、われわれはとくに初めての接触に興味を持った．これを特に第一接触と呼んでおく．これに関して次の結果を得た．

定理 1.1^[3]. $f: R^2 \rightarrow R^2$ は方向保存、 $0 < \det(Df) < 1$ の同相写像とする． f の m 周期のサドル p の安定多様体 W_s^m と n 周期のサドル q の不安定多様体 W_u^n との間の第一直接ヘテロクリニック接触は次の3つの場合を除いて起こらない．

- (1) $m = n$ で p, q ともに OP1 .
- (2) $m = 2n$ で p は OP1、 q は OP2 .
- (3) $2m = n$ で p は OP2、 q は OP1 .

ここで $Df(p)$ の固有値が正のとき p を OP1、固有値が負のとき OP2 と呼ぶ．

数値計算の結果からも予想されており、Benedicks and Carleson の結果もあるので、島融合の途中のストレンジアトラクターも何らかの不安定多様体に関係していると思われる．本報告の目的は定理 1.1 に基づいてストレンジアトラクターの具体像を描くことである．2節では不安定多様体の極限集合 $\omega_E(\check{W}_u)$ を導入する．これは3節以降で用いる．3節では定理 1.1 を応用して、 2^n 分岐中の安定多様体・不安定多様体の構造変化を調べる．われわれはストレンジアトラクターは 2^n 分岐中に準備されていると考える．4節では 2^n 分岐後の安定多様体・不安定多様体の構造変化を調べる．その際、

予想．ストレンジアトラクター = $\bigcap_{n \geq 0} \omega_E(\check{W}_u^{2^n})$.

をたて、これを支持する証拠をいくつか挙げる。島融合やクライシスそのものが証拠である。

2. 不安定多様体の極限集合

$f : M \rightarrow M$ は 2 次元コンパクト多様体上の $C^r (r \geq 1)$ 微分同相写像とする。 P を f の不動点とする。 $Df(P)$ の固有値が単位円上にないとき P は双曲的とよばれる。 ひとつの固有値の絶対値が 1 より大きく、もうひとつの固有値の絶対値が 1 より小さいとき、 P はサドルとよばれる。 さらに、サドルの固有値が正（または負）のとき、反転なし（または反転あり）とよばれる。 このサドルを OP1（または OP2）と書くことにする。

サドル P の安定多様体・不安定多様体は次式で定義される。

$$\begin{aligned} W_s(P) &= \{x \in M \mid f^n(x) \rightarrow P \text{ as } n \rightarrow \infty\}, \\ W_u(P) &= \{x \in M \mid f^n(x) \rightarrow P \text{ as } n \rightarrow -\infty\}. \end{aligned} \quad (1)$$

$\check{W}_s = W_s \setminus P = \check{W}_s^1 \oplus \check{W}_s^2$, $\check{W}_u = W_u \setminus P = \check{W}_u^1 \oplus \check{W}_u^2$ とおく。 \check{W}_s^1 と \check{W}_s^2 を W_s の成分、 \check{W}_u^1 と \check{W}_u^2 を W_u の成分とよぶことにする。 よく知られているように、各 $\check{W}_s^1, \check{W}_s^2, \check{W}_u^1, \check{W}_u^2$ は R から M への 1 対 1 C^r はめ込みである。 そこで、いま例えば $\phi : R \rightarrow M$ を R から \check{W}_u^1 の上への 1 対 1 C^r はめ込みとする。 $\phi : t \mapsto \phi(t)$ を \check{W}_u^1 のパラメータ表式と呼ぼう。

定義 2.1. \check{W}_u をサドル P の不安定多様体の 1 つの成分とし、 $\phi(t)$ をそのパラメータ表式とする。 次の集合 $\omega_E(\check{W}_u, f)$ を \check{W}_u の ω_E 極限集合と呼ぶ。

$$\omega_E(\check{W}_u, f) = \{r \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n) = r, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty\}. \quad (2)$$

上の定義で、 \check{W}_u 上、 $\phi(0)$ の位置はあからさまに示されていない。 $\omega_E(\check{W}_u, f)$ が $\phi(0)$ に依存しないのは明らかである。これは曲面上の力学系における ω 極限集合の場合と同じである。また α_E 極限集合 $\alpha_E(\check{W}_u, f)$ も同様に定義できるが、これはいつも P に一致してしまうので興味深い対象ではない。同様に $\omega_E(\check{W}_s, f)$ 、 $\alpha_E(\check{W}_s, f)$ を定義できる。上と同様、 $\omega_E(\check{W}_s, f) = P$ であって興味深くない。結局、面白い対象は $\omega_E(\check{W}_u, f)$ と $\alpha_E(\check{W}_s, f)$ である。

\check{W}_u の通常の ω 極限集合は次のように書ける。

$$\omega(\check{W}_u, f) = \{r \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = r, p \in \check{W}_u\}. \quad (3)$$

以下では $\omega_E(\check{W}_u, f)$ 、 $\omega(\check{W}_u, f)$ などを簡単のため $\omega_E(\check{W}_u)$ 、 $\omega(\check{W}_u)$ と書くことにする。いくつか基本的性質を挙げておく。

性質 1. $\omega_E(\check{W}_u) \supset \omega(\check{W}_u)$.

性質 2. $\omega_E(\check{W}_u)$ は閉不変集合である。 \check{W}_u が M 内にコンパクトな閉包を持てば、 $\omega_E(\check{W}_u)$ は連結である。

性質 3. $\omega_E(\check{W}_u)$ が一点ならそれは不動点である。

例. W_u が sink に落ち込んでいるとき、

$$[\check{W}_u] \supset \omega_E(\check{W}_u) = \omega(\check{W}_u).$$

トーラス上の平行移動写像で固有値の比が無理数の場合

$$[\check{W}_u] = \omega_E(\check{W}_u) = \omega(\check{W}_u).$$

3、4節で使う性質を述べておこう。これらは Palis の λ 補題 [4]を用いて証明される。

定理 2.2. f は R^2 の C^1 微分同相であるとし、 P は OP1 サドルとする. P の安定および不安定多様体を W_s, W_u とし、成分をそれぞれ、 $\check{W}_s^1, \check{W}_s^2, \check{W}_u^1, \check{W}_u^2$ とする. \check{W}_u^1 と \check{W}_s^1 が横断的ホモクリニク交差を持つとする. このとき、

$$\omega_E(\check{W}_u^1) \supset W_u \cup \omega_E(\check{W}_u^2). \quad (4)$$

定理 2.3. f は R^2 の C^1 微分同相であるとし、 P, Q ともに OP1 サドルとする. P の安定および不安定多様体の成分をそれぞれ $\check{W}_s^1(P), \check{W}_s^2(P), \check{W}_u^1(P), \check{W}_u^2(P)$ とする. Q についても同様に書くことにする. $\check{W}_u^1(P)$ と $\check{W}_s^1(Q)$ が横断的ヘテロクリニク交差を持つとする. このとき、

$$\omega_E(\check{W}_u^1(P)) \supset W_u(Q) \cup \omega_E(\check{W}_u^1(Q)) \cup \omega_E(\check{W}_u^2(Q)). \quad (5)$$

定理 2.4. f は R^2 の C^1 微分同相であるとし、 $P_i, i = 1, \dots, n$, を n 個の OP1 サドルとする. P_i の安定および不安定多様体の成分をそれぞれ、 $\check{W}_s^1(P_i), \check{W}_s^2(P_i), \check{W}_u^1(P_i), \check{W}_u^2(P_i)$ とする. これらのサドルは次のようにサイクルを構成しているとする. すなわち、 $P_{n+1} = P_1$ として $\check{W}_u^1(P_i)$ と $\check{W}_s^1(P_{i+1}), i = 1, \dots, n$ が横断的ヘテロクリニク交差を持つとする. このとき、

$$\begin{aligned} \omega_E(\check{W}_u^1(P_1)) &= \omega_E(\check{W}_u^1(P_2)) = \dots = \omega_E(\check{W}_u^1(P_n)) \\ &\supset (\cup_{i=1}^n W_u(P_i)) \cup (\cup_{i=1}^n \omega_E(W_u^2(P_i))). \end{aligned} \quad (6)$$

これらの結果を周期点の場合に拡張するのは容易である. また安定多様体の α_E 極限集合に関しては双対的な関係が得られる.

3. 2^n 分岐中の安定多様体・不安定多様体の構造変化

この節では a をパラメーターとする C^1 写像族 $f_a: R^2 \rightarrow R^2$ を考える. 散逸的かつ方向保存、すなわち、 $0 < J = \text{Det}(Df_a) < 1$ であるとする. さらに次の条件を課す.

(A1) 2つの不動点 O, Q がある. この2つの不動点はサドル・ノード分岐で生じたものとする. パラメーター a を増加させたとき、 Q を母不動点として 2^n 分岐が起こり、それが完結する. 不動点 O はその間、固有値 $\lambda_u > 1 > \lambda_s > 0$ なるサドルである.

(A2) 2^n 分岐で生じたサドルはパラメーターを増加させたとき、サドルのままである.

(A3) 境界クライシスが起こる. クライシスによってストレンジアトラクターは消滅する.

(A4) 2^n 分岐で生じたサドルの安定・不安定多様体の第一接触は非縮退である. すなわち、パラメーターを変化させたとき、第一接触の状態を有限速度で通過する.

記法. 分岐で生じる 2^n サドルの安定・不安定多様体を $W_s^{2^n}, W_u^{2^n}$ と書く. 2^n 周期点が生じるパラメーター値を a^n と書く. この周期点は $a^n < a < a^{n+1}$ のとき安定である. $a^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ とおく. $\check{W}_s^{2^n}$ と $\check{W}_u^{2^n}$ の第一ホモクリニック接触が起こるパラメーター値を a_{hom}^n とする. $\check{W}_s^{2^m}$ と $\check{W}_u^{2^n}$, $0 \leq m < n$ の第一ヘテロクリニック接触が起こるパラメーター値を $a_{ahet}^{m,n}$ とする. 最後に、境界クライシスが起こるパラメーター値を a_{bc} とする.

次に第一漸近ヘテロクリニック接触の3つのタイプを挙げておく.

$$\begin{aligned}
& \text{Type - 1. } \alpha_E(\check{W}_s) \cap \check{W}_u \neq \phi, \check{W}_s \cap \omega_E(\check{W}_u) = \emptyset, \\
& \text{Type - 2. } \check{W}_s \cap \omega_E(\check{W}_u) \neq \phi, \alpha_E(\check{W}_s) \cap \check{W}_u = \emptyset, \\
& \text{Type - 3. } \alpha_E(\check{W}_s) \cap \omega_E(\check{W}_u) \neq \phi, \\
& \quad \check{W}_s \cap \omega_E(\check{W}_u) = \alpha_E(\check{W}_s) \cap \check{W}_u = \emptyset.
\end{aligned} \tag{7}$$

定理 1.1 より、 $0 \leq m < n$ として、分岐で生じた 2^m 周期のサドルと 2^n 周期のサドルの安定多様体と不安定多様体とは第一直接接触しないことがただちに示される。なぜなら、 2^n 分岐で生じるサドルはすべて OP2 であるから。そこで次のような疑問が生じる。 $0 \leq m < n$ として、 $\check{W}_u^{2^m}$ と $\check{W}_s^{2^n}$ ははじめから交差している。これらは離れることはあるか？また $\check{W}_s^{2^m}$ と $\check{W}_u^{2^n}$ ははじめ離れている。これらが交差に入るとしたら、第一漸近接触はどのタイプか？これに答えるのが次の定理 3.1, 3.2 である [5]。

定理 3.1. $0 \leq m < n$ として $\check{W}_u^{2^m}$ と $\check{W}_s^{2^n}$ は存在する限り、横断的ヘテロクリニック交差点を有する。

定理 3.1 と λ 補題により、次の包含関係が常に成り立つ。

$a^{n+1} < a < a^{n+2}$ のとき

$$\begin{aligned}
\omega_E(\check{W}_u^1(Q)) \supset \omega_E(\check{W}_u^2) \supset \dots \supset \omega_E(\check{W}_u^{2^n}) \\
= 2^{n+1} - \text{sink} \\
\alpha_E(\check{W}_s^1(Q)) \subset \alpha_E(\check{W}_s^2) \subset \dots \subset \alpha_E(\check{W}_s^{2^n}) \\
\subset 2^{n+1} - \text{sink の安定多様体}
\end{aligned} \tag{8}$$

$a = a^*$ のとき

$$\begin{aligned} \omega_E(\check{W}_u^1(Q)) \supset \omega_E(\check{W}_u^2) \supset \dots \supset \omega_E(\check{W}_u^{2^n}) \supset \dots \\ \supset 2^\infty - \text{準周期点} \\ \alpha_E(\check{W}_s^1(Q)) \subset \alpha_E(\check{W}_s^2) \subset \dots \subset \alpha_E(\check{W}_s^{2^n}) \subset \dots \end{aligned} \quad (9)$$

$a > a^*$ のとき

$$\begin{aligned} \omega_E(\check{W}_u^1(Q)) \supset \omega_E(\check{W}_u^2) \supset \dots \supset \omega_E(\check{W}_u^{2^n}) \supset \dots \\ \alpha_E(\check{W}_s^1(Q)) \subset \alpha_E(\check{W}_s^2) \subset \dots \subset \alpha_E(\check{W}_s^{2^n}) \subset \dots \end{aligned} \quad (10)$$

定理 3.2. $0 \leq m < n$ として $\check{W}_s^{2^m}$ と $\check{W}_u^{2^n}$ の第一漸近接触が起こるとすれば、それはタイプ-3であり、しかもそれは、 $\check{W}_s^{2^m}$ と $\check{W}_u^{2^n}$ それぞれの第一ホモクリニック接触後に起こる。

4. 2^n 分岐後の安定多様体・不安定多様体の構造変化^[6]

この節では3節と同じ写像族を考える。ただし、議論を簡単にするため、条件 (A4) の代わりにもう少し強い条件 (A4') を仮定する。

(A4') $0 \leq m < n$ として、分岐で生じた 2^m サドルの安定多様体と 2^n サドルの不安定多様体は第一接触の後、パラメーターを増加させたとき、つねに横断的ヘテロクリニック点をもつ。

さらに、次の仮定をおく。

(A5) $a < a_{bc}$ のときコンパクトな集合 U で $fU \subset U$ なるものがあり、自明でない開集合を含み、 2^n 分岐の母不動点 Q およびその不安定多様体を含む。

このとき

$$\Omega = \bigcap_{n \geq 0} f^n U, \quad (11)$$

とおくと、 Ω はコンパクトな吸引集合である^[7]. Ω は U 内の最大の不変集合である. ここで、 2^n 分岐のサドルの不安定多様体の極限集合の極小な集合 ω を導入しよう.

$$\omega = \bigcap_{n \geq 0} \omega_E(\check{W}_u^{2^n}). \quad (12)$$

ω は次のような性質を持っている;(1) ω はコンパクトで不変である、(2) $\omega \subset \Omega$ 、(3) $\omega = \omega_E(\check{W}_u^{2^n})$ なら、 2^n 個の成分からなる.

ストレンジアトラクター (SA) が存在すれば、 Ω 内にある. だから一般に SAC ω である.

2節では、一般のサドルのサイクルを考えたが、ここではとくに 2^n 分岐で生じるサドルのサイクルを考える. $2^n, 2^{n+1}, \dots, 2^m$ ($n < m$) サドルがサイクルをなす時、これを $(2^n, 2^m)$ サイクルとよぶ. $m \rightarrow \infty$ の場合も許すことにして、それを $(2^n, \infty)$ サイクルとよぶ. $(2^n, \infty)$ サイクルがあるとき $\omega = \omega_E(\check{W}_u^{2^n})$ であることに注意する.

$$a_{ahet}^{n,\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ahet}^{n,m}, \quad a_{ahet}^{\infty,\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ahet}^{n,\infty}, \quad (13)$$

と定義すると、前節の ω_E 極限集合の包含関係から次の式を得る.

$$a_{ahet}^{n,\infty} \geq a_{ahet}^{n,n+k} \text{ for } n \geq 0 \text{ and } k \geq 1, \quad (14)$$

$$a_{ahet}^{m,\infty} \geq a_{ahet}^{n,\infty} \geq \dots \geq a_{ahet}^{\infty,\infty} \geq a^* \text{ for } 0 \leq m < n. \quad (15)$$

以下、1節に述べた予想を支持する理論的および数値的証拠を挙げよう.

島融合過程が理論的証拠の一つである. パラメーターを増加させると ω は島融合を行なう. 実際、(A4')により、 $(2^n, \infty)$ サ

イクルは各 $n \geq 1$ に対して任意の $a \in (a_{ahet}^{n,\infty}, a_{ahet}^{n-1,\infty}]$ で存在する。だから、 ω の成分の数はパラメーターの値が $a_{ahet}^{n,\infty}$ を通過する度に变化する。ただし、 $0 \leq m < n$ として $(2^m, 2^n)$ サイクルと $(2^{n+1}, \infty)$ サイクルが共存している場合には、 ω の成分の数はパラメーターが $a_{ahet}^{n,\infty} = a_{ahet}^{n-1,\infty} = \dots = a_{ahet}^{m,\infty}$ を通過するときに 2^{n+1} 個から 2^m 個に変化する。このような変化が数値的に確かめられれば予想は強化される。

第二に数値的証拠を挙げよう。島融合の仕方が証拠である。定理 3.2 より、周期の大きなサドルの不安定多様体が周期の小さなサドルの安定多様体と第一ヘテロクリニック接触する前に、それぞれの多様体は第一ホモクリニック接触を済ませている。したがって、(14) 式より、 $\omega = \omega_E(\check{W}_u^{2^{n+1}})$ が $\check{W}_s^{2^n}$ と接触するときにも $\check{W}_s^{2^n}$ は第一ホモクリニック接触を済ませている。すると ω の島融合は 1 図の (a) ではなくて (b) のように観測されるはずである。Hénon 型写像のストレンジアトラクターの島融合の数値実験結果を 2 図に示した。この結果は上記予想を支持している。

最後に、境界クライシスも証拠である。もう一つのサドル O は 2^n 分岐に関係しないので、いままでの議論には出てこなかったが、クライシスがストレンジアトラクターと O の安定多様体との衝突によるものであることはよく知られている。不動点 O, Q がサドル・ノード分岐で生じたという仮定 (条件 (A1)) より、 O の安定・不安定多様体の α_E および ω_E 極限集合を包含関係 (8)、(9)、(10) の一番左側に加えることができる。その結果、いままでの議論がそのまま適用できる。すると、 ω が O の安定多様体と接触する前に、 O の安定多様体と不安定多様体は第一接触を

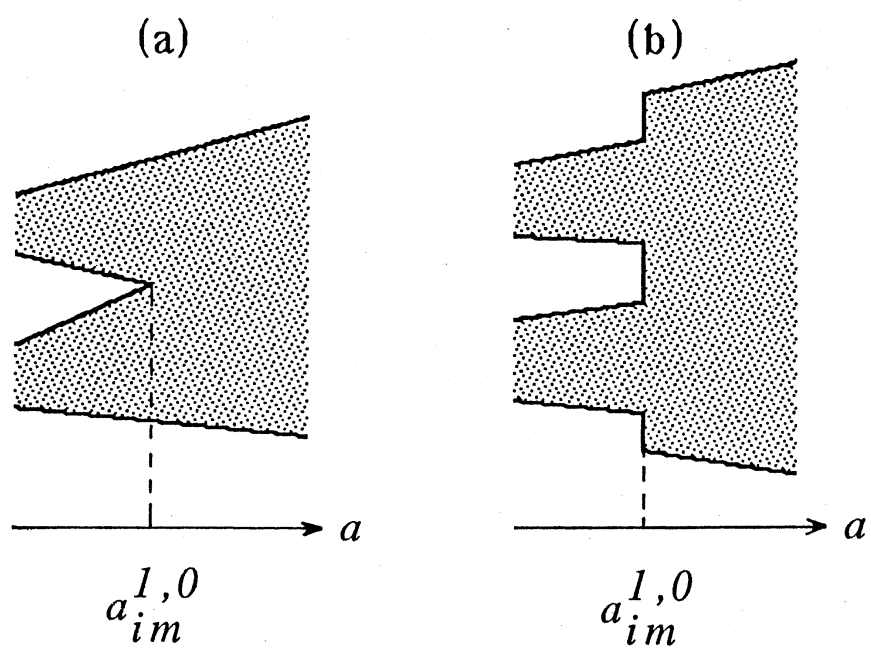


Fig.1

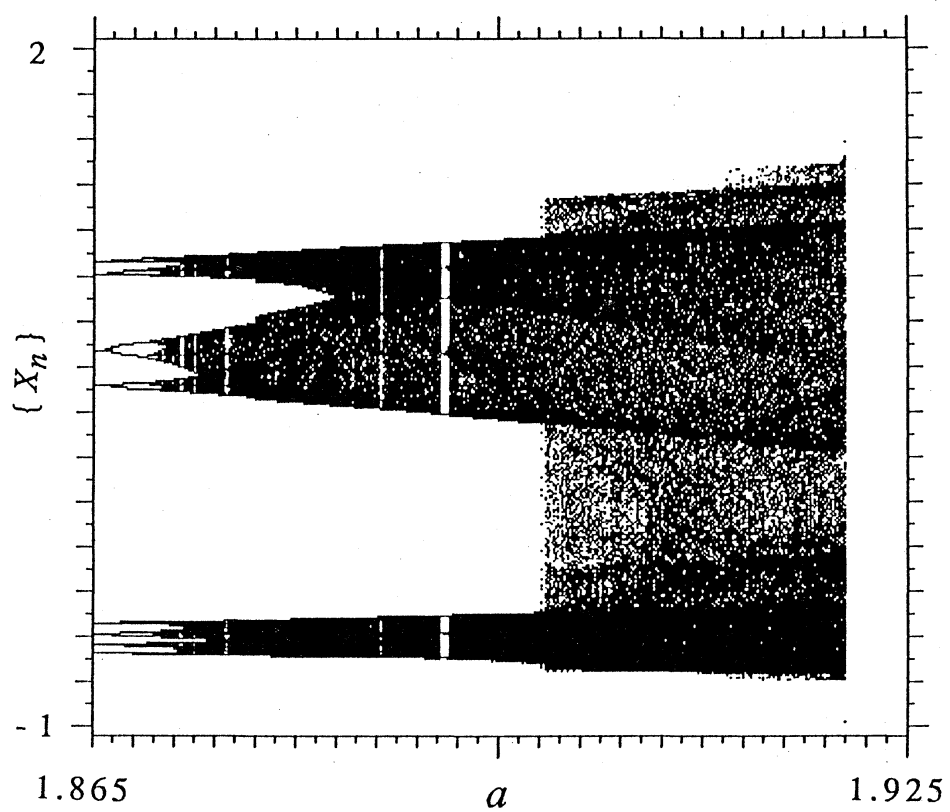


Fig.2

済ませているはずである。したがって、境界クライシスもストレンジアトラクターと $\alpha_E(\check{W}_s(O))$ との漸近的接触によって起こる。一方、内部クライシスにおいても、複数のアトラクターが1図(a)ではなくて(b)のように離れたままの状態でクライシスを起こし合体するはずである。数値計算ではここで述べた事実が観測されている。

参考文献

- [1] M.Benedicks and L.Carleson, The dynamics of the Hénon map, *Ann. Math.* **133** (1991), 73.
- [2] C.Grebogi, E.Ott, and J.A.Yorke, Chaotic attractors in crisis, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1982), 339.
- [3] Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, A theorem on the first heteroclinic tangency in two-dimensional maps: orientation preserving case, *J. Stat. Phys.* **59** (1990), 1297.
- [4] J.Palis, On Morse-Smale dynamical systems, *Topology* **8**(1969), 385.
- [5] Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, Structure change of stable and unstable manifolds in two-dimensional maps: period-doubling bifurcation, *Chaos, Solitons, & Fractals* **2** (1992) (in press).
- [6] Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, Structure change of stable and unstable manifolds in two-dimensional maps: island-merging and boundary crisis, *Chaos, Solitons, & Fractals* (submitted).
- [7] D.Ruelle, Small random perturbation of dynamical systems and the definition of attractors, *Comm. Math. Phys.* **82** (1981), 137.