数理解析研究所講究録
第 820 巻 1993 年 91-101

分解能 $\mathrm{V}_{p,q}$ の釣合い型一部実施 s^m 要因計画の分散分析

岡山理大・理　兵頭　義史　(Yoshifumi Hyodo)

広島大・総合科　桑田　正秀　(Masahide Kuwada)

実用的な実験において，“高次交互作用”および“主効果および低次交互作用の高次成分”を無視可能とする状況が経験的に仮定されている．一部実施 s^m 要因計画 (s^m-FF 計画) T の線形模型は次式で与えられる：

$$\underline{y}(T) = E_T \underline{\theta}_{n(p,q)} + \underline{e}_T$$

ただし

$\underline{y}(T)$: $N \times 1$ 観測値ベクトル

E_T : $N \times n(p,q)$ 計画行列 ($n(p,q) \equiv 1 + pm + q^2\binom{m}{2}$; $1 \le q \le p \le s-1$)

$\underline{\theta}_{n(p,q)} \equiv (\{\underline{\theta}'_{\underline{a}_0}\};\{\underline{\theta}'_{\underline{a}_i}\};\{\underline{\theta}'_{\underline{a}_{jj}}\};\{\underline{\theta}'_{\underline{a}_{k\ell}}\})'$: $n(p,q) \times 1$ 要因効果ベクトル

$\underline{e}_T$: $N \times 1$ 誤差ベクトル ($\underline{e}_T \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_N)$)

ここに

$\underline{\theta}'_{\underline{a}_0} \equiv (\{\theta(\phi)\})$: 一般平均

$\underline{\theta}'_{\underline{a}_i} \equiv (\{\theta(t^i) \mid 1 \le t \le m\})$: 主効果の i^{th} 成分 ($1 \le i \le p$)

$\underline{\theta}'_{\underline{a}_{jj}} \equiv (\{\theta(t_1^j t_2^j) \mid 1 \le t_1 < t_2 \le m\})$: 2因子交互作用の $j^{th} \times j^{th}$ 成分 ($1 \le j \le q$)

$\underline{\theta}'_{a_{k\ell}} \equiv (\{\theta(t_1^k t_2^\ell) \mid 1 \le t_1 \neq t_2 \le m\})$：2因子交互作用の$k^{th} \times \ell^{th}$成分$(1 \le k < \ell \le g)$

情報行列 $M_T\ (\equiv E'_T E_T)$ が正則のとき，$\underline{\theta}_{n(p,g)}$ の BLUE および その分散共分散行列は，それぞれ次式で与えられる：

(i) $\hat{\underline{\theta}}_{n(p,g)} = M_T^{-1} E'_T \underline{y}(T)$ (ii) $Var[\hat{\underline{\theta}}_{n(p,g)}] = \sigma^2 M_T^{-1}$

定義 1

s^m-FF 計画 T において，その情報行列 M_T が正則のとき，T を分解能 $V_{p,g}$ の s^m-FF 計画という．特に $p=g=s-1$ のとき，T は分解能 V の s^m-FF 計画とよばれる．

定義 2

T を分解能 $V_{p,g}$ の s^m-FF 計画とする．$\underline{\theta}_{n(p,g)}$ の BLUE $\hat{\underline{\theta}}_{n(p,g)}$ の分散共分散行列 $Var[\hat{\underline{\theta}}_{n(p,g)}]$ が m 因子の任意の置換に関して不変であるとき，T を分解能 $V_{p,g}$ の釣合い型一部実施 s^m 要因計画（s^m-BFF 計画）という．

定義 3

シンボル $0, 1, \cdots, s-1$ を要素とする $N \times m$ 配列 T において，その任意の $N \times t$ 部分配列 T_0 の行として，重み $(i_0, i_1, \cdots, i_{s-1})$（$i_\alpha$：シンボル$\alpha$の個数）をもつすべての t 次元行ベクトルが各々 $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}$ 回現れるとき，T を大きさ N，制約数 m，s シンボル，強さ t，指標集合 $\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\}$ の均斉配列といい，$BA(N, m, s, t; \{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\})$ で表す．

命題 1

T を $BA(N, m, s, 4; \{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\})$ とし，その情報行列 M_T は正則である．

$\Longrightarrow$ T は分解能 $V_{p,g}$ の s^m-BFF 計画である．

[注１]

$p=g=s-1$ のとき，命題１の逆は真である．

$BA(N,m,s,4;\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\})$ から導かれる s^m-FF計画 T の情報行列 M_T は次の Block 対角行列と相似である：

$$D \equiv diag(I_{\phi_0}\otimes K_0 ; I_{\phi_1}\otimes K_1 ; I_{\phi_2}\otimes K_2 ; I_{\phi_f}\otimes K_f)$$

すなわち ${}^{\exists}Q \in O(n(p,g))$ s.t. $Q'M_T Q = D$ が成り立つ．ただし

$\phi_0 \equiv 1$; $\phi_1 \equiv \frac{m(m-3)}{2}$; $\phi_2 \equiv \binom{m-1}{2}$; $\phi_f \equiv m-1$

$K_\beta \equiv [k_\beta(\underline{a},\underline{b})]$ $(\underline{a},\underline{b}\in Z_\beta^*)$: d_β 次対称行列 $(0\le\beta\le2)$

$K_f \equiv [k_{f_{uv}}(\underline{u},\underline{v})]$ $((\underline{u}:u),(\underline{v}:v)\in Z_f^*)$: d_f 次対称行列

$(d_0 \equiv 1+p+g+\binom{g}{2}$; $d_1 \equiv g+\binom{g}{2}$; $d_2 \equiv \binom{g}{2}$; $d_f \equiv p+g+2\binom{g}{2})$

ここに

$k_\beta(\underline{a},\underline{b})$, $k_{f_{uv}}(\underline{u},\underline{v})$: $BA(N,m,s,4;\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\})$ の指標 $\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}$ のある線形式

Z_β^*, Z_f^* は要因効果の重要度に関係するある種の有限列で，

$Z_0^* \equiv \{\{\underline{a}_0\};\{\underline{a}_i\};\{\underline{a}_{jj}\};\{\underline{a}_{k\ell}\}\}$; $Z_1^* \equiv \{\{\underline{a}_{jj}\};\{\underline{a}_{k\ell}\}\}$; $Z_2^* \equiv \{\{\underline{a}_{k\ell}\}\}$;

$Z_f^* \equiv \{\{(\underline{a}_i:1)\};\{(\underline{a}_{jj}:2)\};\{(\underline{a}_{k\ell}:3),(\underline{a}_{k\ell}:4)\}\}$

命題２

T を $BA(N,m,s,4;\{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\})$ とする．T が分解能 $V_{p,g}$ の s^m-BFF計画である．

$\rightleftarrows$ K_β $(0\le\beta\le2)$, K_f は正値定符号行列である．

命題３

命題２の計画 T の情報行列 M_T の固有多項式 $\psi_T(x)$ は次式で与えられる：

$$\psi_T(x) \equiv det[M_T - xI_{n(p,g)}] = \prod_{\beta=0}^{2}\{det[K_\beta - xI_{d_\beta}]\}^{\phi_\beta}\{det[K_f - xI_{d_f}]\}^{\phi_f}$$

本報告では，多次元リレーションシップ代数の構造を用いて，均斉配列 $BA(N, m, s, 4; \{\lambda_{i_0 i_1 \cdots i_{s-1}}\})$ から導かれる分解能 $V_{p,g}$ の s^m-BFF計画 T の分散分析および仮説検定の一般論をのべる．ただし $N > n(p, g)$ とする．

$E_{\underline{a}}$: $\underline{\theta}_{\underline{a}}$ に対応する E_T の $N \times n(\underline{a})$ 部分行列

$A_\beta^{\#}(\underline{a}, \underline{b})$ (or $A_{f_{uv}}^{\#}(\underline{u}, \underline{v})$) : 局所多次元リレーションシップ行列のある線形式で与えられる $n(\underline{a}) \times n(\underline{b})$ (or $n(\underline{u}) \times n(\underline{v})$) 行列

とする．ただし

$$n(\underline{a}) \equiv \begin{cases} 1 & (\underline{a} \in \{\underline{a}_0\}) \\ m & (\underline{a} \in \{\underline{a}_i\}) \\ \binom{m}{2} & (\underline{a} \in \{\underline{a}_{jj}\}) \\ 2\binom{m}{2} & (\underline{a} \in \{\underline{a}_{k\ell}\}) \end{cases}$$

このとき，$A_\beta^{\#}(\underline{a}, \underline{b})$，$A_{f_{uv}}^{\#}(\underline{u}, \underline{v})$ の性質を用いて，線形模型は，

$$\underline{y}(T) = \sum_{\beta=0}^{2} \sum_{\underline{a} \in Z_\beta^*} E_{\underline{a}} A_\beta^{\#}(\underline{a}, \underline{a}) \underline{\theta}_{\underline{a}} + \sum_{(\underline{u}:u) \in Z_f^*} E_{\underline{u}} A_{f_{uu}}^{\#}(\underline{u}, \underline{u}) \underline{\theta}_{\underline{u}} + \underline{e}_T$$

で与えられる．

［注 2］

(a) $A_0^{\#}(\underline{a}, \underline{a})\underline{\theta}_{\underline{a}}$ の要素 : $\underline{\theta}_{\underline{a}}$ の平均

(b) $A_1^{\#}(\underline{a}, \underline{a})\underline{\theta}_{\underline{a}}$，$A_2^{\#}(\underline{a}^*, \underline{a}^*)\underline{\theta}_{\underline{a}^*}$，$A_{f_{uu}}^{\#}(\underline{u}, \underline{u})\underline{\theta}_{\underline{u}}$ の各要素 :

互いに直交する $\underline{\theta}_{\underline{a}}$，$\underline{\theta}_{\underline{a}^*}$，$\underline{\theta}_{\underline{u}}$ の要素の対比

(c) $A_\beta^{\#}(\underline{a}, \underline{a})\underline{\theta}_{\underline{a}}$ (or $A_{f_{uu}}^{\#}(\underline{u}, \underline{u})\underline{\theta}_{\underline{u}}$) には，$\phi_\beta$ (or ϕ_f) 個の一次独立な $\underline{\theta}_{\underline{a}}$ (or $\underline{\theta}_{\underline{u}}$) の線形母数関数が存在する．

$N \times N$ 行列 $F_\beta(\underline{a}, \underline{b})$，$F_{f_{uv}}(\underline{u}, \underline{v})$ を次式で定義する :

$$F_\beta(\underline{a}, \underline{b}) \equiv E_{\underline{a}} A_\beta^{\#}(\underline{a}, \underline{b}) E_{\underline{b}}' \quad \text{for } \underline{a}, \underline{b} \in Z_\beta^* \quad (0 \le \beta \le 2)$$

$$F_{fuv}(\underline{u},\underline{v}) \equiv E_{\underline{u}} A^{\#}_{fuv}(\underline{u},\underline{v}) E'_{\underline{v}} \quad \text{for } (\underline{u}:u),(\underline{v}:v) \in Z^{*}_{f}$$

このとき，次が成り立つ.

補題 1

(i) $F_{B}(\underline{a},\underline{c}) F_{\gamma}(\underline{d},\underline{b}) = \delta_{B\gamma} K_{B}(\underline{c},\underline{d}) F_{B}(\underline{a},\underline{b})$

(ii) $F_{B}(\underline{a},\underline{b}) F_{fuv}(\underline{u},\underline{v}) = F_{fuv}(\underline{u},\underline{v}) F_{B}(\underline{a},\underline{b}) = O_{N \times N}$

(iii) $F_{fuw}(\underline{u},\underline{w}) F_{fxv}(\underline{x},\underline{v}) = K_{fwx}(\underline{w},\underline{x}) F_{fuv}(\underline{u},\underline{v})$

次に N×N 行列 P^{g}_{B}, P^{t}_{f} を次式で定義する：

$$P^{g}_{B} \equiv \sum_{x=0}^{1} \sum_{\underline{a},\underline{b} \in Z^{*g-x}_{B}} (-1)^{x} \eta^{g-x}_{B}(\underline{a},\underline{b}) F_{B}(\underline{a},\underline{b}) \quad \text{for } 0 \le g \le d_{B}-1 \ (0 \le B \le 2)$$

$$P^{t}_{f} \equiv \sum_{y=0}^{1} \sum_{(\underline{u}:u),(\underline{v}:v) \in Z^{*t-y}_{f}} (-1)^{y} \eta^{t-y}_{fuv}(\underline{u},\underline{v}) F_{fuv}(\underline{u},\underline{v}) \quad \text{for } 0 \le t \le d_{f}-1$$

ただし

$K_{B}(g)^{-1} \equiv [\eta^{g}_{B}(\underline{a},\underline{b})]$ (or $K_{f}(t)^{-1} \equiv [\eta^{t}_{fuv}(\underline{u},\underline{v})]$)：

K_{B} (or K_{f}) の $(g+1)\times(g+1)$ (or $(t+1)\times(t+1)$) 左上部分行列の逆行列

Z^{*g}_{B} (or Z^{*t}_{f})： Z^{*}_{B} (or Z^{*}_{f}) の $(g+1)$ (or $(t+1)$) 番目までの要素で構成される左部分列

このとき，次が成り立つ.

補題 2

(i) P^{g}_{B}, P^{t}_{f}, $P_{e} \equiv I_{N} - \sum_{B=0}^{2} \sum_{g=0}^{d_{B}-1} P^{g}_{B} - \sum_{t=0}^{d_{f}-1} P^{t}_{f}$ ：

互いに直交する対称な巾等行列

(ii) $\mathrm{rank}[P^{g}_{B}] = \phi_{B}$ ； $\mathrm{rank}[P^{t}_{f}] = \phi_{f}$ ； $\mathrm{rank}[P_{e}] = N - n(P,g)$

R^{N} の部分空間 R^{g}_{B}, R^{t}_{f}, R_{e} を次式で定義する：

$$R_B^g \equiv R_{L(g-1;B)^\perp}(L(g;B)) \quad \text{for } 0 \le g \le d_B - 1 \quad (0 \le B \le 2)$$

$$R_f^t \equiv R_{L(t-1;f)^\perp}(L(t;f)) \quad \text{for } 0 \le t \le d_f - 1$$

$$R_e \equiv R_{E_T^\perp}$$

ただし

$L(g;B) \equiv [\{E_{\underline{a}} A_B^{\#}(\underline{a},\underline{a}) \mid \underline{a} \in Z_B^{*g}\}]$

$L(t;f) \equiv [\{E_{\underline{u}} A_{fuu}^{\#}(\underline{u},\underline{u}) \mid (\underline{u}:u) \in Z_f^{*t}\}]$

$R_{A^\perp}(B)$: $R(A)\ (\subset R(B))$ の $R(B)$ に関する直交補空间

$R_{C^\perp}$: $R(C)$ の 直交補空间

このとき，次が成り立つ.

定理 1

$$R^N = R(E_T) \oplus R_e = \bigoplus_{\substack{0 \le g \le d_B - 1 \\ 0 \le B \le 2}} R_B^g \bigoplus_{0 \le t \le d_f - 1} R_f^t \oplus R_e$$

[注 3]

P_B^g, P_f^t, P_e は，それぞれ R^N の部分空间 R_B^g, R_f^t, R_e 上への正射影行列である.

定理 2

$$\underline{y}(T)'\underline{y}(T) = \sum_{B=0}^{2}\sum_{g=0}^{d_B-1} S_B^g + \sum_{t=0}^{d_f-1} S_f^t + S_e$$

ただし

$S_B^g \equiv \underline{y}(T)' P_B^g \underline{y}(T)$; $S_f^t \equiv \underline{y}(T)' P_f^t \underline{y}(T)$; $S_e \equiv \underline{y}(T)' P_e \underline{y}(T)$

定理 3

$\hat{\sigma}^2 \equiv \dfrac{S_e}{N - n(p,g)}$ は σ^2 の不偏推定量である.

定理 4

2次形式 $\frac{1}{\sigma^2}S_B^g$, $\frac{1}{\sigma^2}S_f^t$ の非心母数は, それぞれ次式で与えられる:

$$\frac{1}{\sigma^2}\lambda_B^g = \sum_{\underline{a},\underline{b}\in Z_B^{*(g)}} \left\{\frac{C_B^g(\underline{a},\underline{b})}{\sigma^2}\right\} \underline{\theta}'_{\underline{a}} A_B^{\#}(\underline{a},\underline{b})\,\underline{\theta}_{\underline{b}} \quad \text{for } 0\le g\le d_B-1 \ (0\le B\le 2)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\lambda_f^t = \sum_{(\underline{u}:u),(\underline{v}:v)\in Z_f^{*(t)}} \left\{\frac{C_f^t(\underline{u}:u,\underline{v}:v)}{\sigma^2}\right\} \underline{\theta}'_{\underline{u}} A_{f_{uv}}^{\#}(\underline{u},\underline{v})\,\underline{\theta}_{\underline{v}} \quad \text{for } 0\le t\le d_f-1$$

ただし

$$C_B^g(\underline{a},\underline{b}) \equiv \sum_{x=0}^{1} \sum_{\underline{c},\underline{d}\in Z_B^{*g-x}} (-1)^x \eta_B^{g-x}(\underline{c},\underline{d})\, K_B(\underline{a},\underline{c})\, K_B(\underline{d},\underline{b})$$

$$C_f^t(\underline{u}:u,\underline{v}:v) \equiv \sum_{y=0}^{1} \sum_{(\underline{w}:w),(\underline{x}:x)\in Z_f^{*t-y}} (-1)^y \eta_{f_{wx}}^{t-y}(\underline{w},\underline{x})\, K_{f_{uw}}(\underline{u},\underline{w})\, K_{f_{xv}}(\underline{x},\underline{v})$$

$Z_B^{*(g)}$ (or $Z_f^{*(t)}$): Z_B^* (or Z_f^*) の $(g+1)$ (or $(t+1)$) 番目以降で構成される右部分列

以上の結果を要約して, 次の分散分析表を得る:

表 1. 分解能 $V_{p,g}$ の $\mathcal{S}^m$-BFF 計画の分散分析表

変動要因	平方和	自由度	非心母数
$A_B^{\#}(\underline{a},\underline{a})\underline{\theta}_{\underline{a}}$	S_B^g	ϕ_B	$\frac{\lambda_B^g}{\sigma^2}$
$A_{f_{uu}}^{\#}(\underline{u},\underline{u})\underline{\theta}_{\underline{u}}$	S_f^t	ϕ_f	$\frac{\lambda_f^t}{\sigma^2}$
誤差項	S_e	$N-n(p,g)$	0
計	$\underline{y}(T)'\underline{y}(T)$	N	

$\underline{a}$: Z_B^* の $(g+1)$ 番目の要素

$(\underline{u}:u)$: Z_f^* の $(t+1)$ 番目の要素

次の仮説（Ⅰ），（Ⅱ）の検定問題を考える：

（Ⅰ）　$H_B^{(g)}$ vs $K_B^{(d_B)}$　$(0 \leq B \leq 2)$

（Ⅱ）　$H_f^{(t)}$ vs $K_{f_{44}}^{(d_f)}$

ただし

$$H_B^{(g)} \equiv \bigcap_{\underline{a} \in Z_B^{*(g)}} H_B^{\underline{a}} \; ; \quad H_B^{\underline{a}} : A_B^{\#}(\underline{a},\underline{a})\underline{\theta}_{\underline{a}} = \underline{0}_{n(\underline{a})}$$

$$H_f^{(t)} \equiv \bigcap_{(\underline{u}:u) \in Z_f^{*(t)}} H_f^{\underline{u}:u} \; ; \quad H_f^{\underline{u}:u} : A_{fuu}^{\#}(\underline{u},\underline{u})\underline{\theta}_{\underline{u}} = \underline{0}_{n(\underline{u})}$$

$$K_B^{(d_B)} : A_B^{\#}(\underline{a}_{g+1g},\underline{a}_{g+1g})\underline{\theta}_{\underline{a}_{g+1g}} \neq \underline{0}_{n(\underline{a}_{g+1g})}$$

$$K_{fuu}^{(d_f)} : A_{fuu}^{\#}(\underline{a}_{g+1g},\underline{a}_{g+1g})\underline{\theta}_{\underline{a}_{g+1g}} \neq \underline{0}_{n(\underline{a}_{g+1g})} \quad (3 \leq u \leq 4)$$

このとき，Nested 法すなわち

(i) $H_B^{(d_B-1)}$ vs $K_B^{(d_B)}$, $H_B^{(d_B-2)}$ vs $H_B^{(d_B-1)}$, ……, $H_B^{(g)}$ vs $H_B^{(g+1)}$ の検定が
すべて有意でないとき，かつそのときに限り仮説（Ⅰ）を採択する.

(ii) $H_f^{(d_f-1)}$ vs $K_{f_{44}}^{(d_f)}$, $H_f^{(d_f-2)}$ vs $H_f^{(d_f-1)}$, ……, $H_f^{(t)}$ vs $H_f^{(t+1)}$ の検定が
すべて有意でないとき，かつそのときに限り仮説（Ⅱ）を採択する.

を用いて有意検定が得られるまで続ける.

Nested 法に対する検定統計量は，次式で与えられる：

$$\text{(i)} \quad F_B^g \equiv \frac{S_B^g / \phi_B}{\{S_e + S_B^{(g)}\} / \{N - n(p,g) + (d_B - 1 - g)\phi_B\}}$$

$$\text{(ii)} \quad F_f^t \equiv \frac{S_f^t / \phi_f}{\{S_e + S_f^{(t)}\} / \{N - n(p,g) + (d_f - 1 - t)\phi_f\}}$$

ただし

$$\underset{\sim}{S}_B^{(g)} \equiv \sum_{x=g+1}^{d_B-1} S_B^x \quad ; \quad \underset{\sim}{S}_f^{(t)} \equiv \sum_{y=t+1}^{d_f-1} S_f^y$$

[注 4]

(a) $F_B^g \sim F_{\phi_B,\, N-n(p,g)+(d_B-1-g)\phi_B}\left(\dfrac{\lambda_B^g}{\sigma^2}\right)$

$F_f^t \sim F_{\phi_f,\, N-n(p,g)+(d_f-1-t)\phi_f}\left(\dfrac{\lambda_f^t}{\sigma^2}\right)$

(b) 仮説(I) (or (II)) : 採択する $\rightleftarrows$ $\lambda_B^g = 0$ (or $\lambda_f^t = 0$)

さらに次の仮説(III)の検定問題を考える:

(III) $H^{(g)}$ vs $K^{(d_0)}$ for $1 \leq g \leq d_0 - 1$

ただし

$$H^{(g)} \equiv \bigcap_{\underline{a} \in Z_0^{*(g)}} H^{\underline{a}} \quad ; \quad H^{\underline{a}} \equiv \begin{cases} \bigcap_{B=1}^{2} H_B^{\underline{a}} \bigcap_{u=3}^{4} H_f^{\underline{a}:u} & (\underline{a} \in \{\underline{a}_{k\ell}\}) \\ H_1^{\underline{a}} \cap H_f^{\underline{a}:2} & (\underline{a} \in \{\underline{a}_{jj}\}) \\ H_f^{\underline{a}:1} & (\underline{a} \in \{\underline{a}_i\}) \end{cases}$$

$$K^{(d_0)} \equiv \bigcup_{B=1}^{2} K_B^{(d_B)} \bigcup_{u=3}^{4} K_{f_{uu}}^{(d_f)}$$

[注 5]

(a) $H^{\underline{a}}$: $\underline{\theta}_{\underline{a}}$の要素の均一性

(b) $K^{(d_0)}$: $\underline{\theta}_{\underline{a}_{g+1g}}$の要素の不均一性

このとき, Nested 法 すなわち

(iii) $H^{(d_0-1)}$ vs $K^{(d_0)}$, $H^{(d_0-2)}$ vs $H^{(d_0-1)}$, ……, $H^{(g)}$ vs $H^{(g+1)}$ の検定が すべて有意でないとき,かつそのときに限り仮説(III)を採択する.

を用いて有意検定が得られるまで続ける.

Nested法に対する検定統計量は，次式で与えられる：

$$\text{(iii)}\quad F^{g} \equiv \frac{S^{g}/\phi^{g}}{\{S_e + S^{(g)}\}/\{N - n(p,q) + \varphi(g)\}}$$

ただし

$$S^{g} \equiv \begin{cases} S_1^{g-p-1} + S_2^{g-p-q-1} + S_f^{2g-p-q-2} + S_f^{2g-p-q-1} & (p+q+1 \leq g \leq d_0-1) \\ S_1^{g-p-1} + S_f^{g-1} & (p+1 \leq g \leq p+q) \\ S_f^{g-1} & (1 \leq g \leq p) \end{cases}$$

$$S^{(g)} \equiv \begin{cases} S_1^{(g-p-1)} + S_2^{(g-p-q-1)} + S_f^{(2g-p-q-1)} & (p+q+1 \leq g \leq d_0-1) \\ S_1^{(g-p-1)} + S_f^{(g-1)} & (p+1 \leq g \leq p+q) \\ S_f^{(g-1)} & (1 \leq g \leq p) \end{cases}$$

$$\phi^{g} \equiv \begin{cases} \phi_1 + \phi_2 + 2\phi_f & (p+q+1 \leq g \leq d_0-1) \\ \phi_1 + \phi_f & (p+1 \leq g \leq p+q) \\ \phi_f & (1 \leq g \leq p) \end{cases}$$

$$\varphi(g) \equiv \begin{cases} (d_1-g+p)\phi_1 + (d_2-g+p+q)\phi_2 + (d_f-2g+p+q)\phi_f & (p+q+1 \leq g \leq d_0-1) \\ (d_1-g+p)\phi_1 + (d_f-g)\phi_f & (p+1 \leq g \leq p+q) \\ (d_f-g)\phi_f & (1 \leq g \leq p) \end{cases}$$

［注 6］

(a) $F^{g} \sim F_{\phi^{g},\, N-n(p,q)+\varphi(g)}\left(\frac{\lambda^{g}}{\sigma^2}\right)$

(b) 仮説(Ⅲ)：採択する $\rightleftarrows$ $\lambda^{g} = 0$

ただし

$$\lambda^{g} \equiv \begin{cases} \lambda_1^{g-p-1} + \lambda_2^{g-p-q-1} + \lambda_f^{2g-p-q-2} + \lambda_f^{2g-p-q-1} & (p+q+1 \leq g \leq d_0-1) \\ \lambda_1^{g-p-1} + \lambda_f^{g-1} & (p+1 \leq g \leq p+q) \\ \lambda_f^{g-1} & (1 \leq g \leq p) \end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Hyodo, Y. and M. Kuwada (1991): Analysis of variance of balanced fractional s^m factorial designs of resolution $V_{p,q}$. TR#7, International Institute for Natural Sciences, Kurashiki.

[2] Kuwada, M. (1988): Analysis of variance and hypotheses testing of balanced fractional 3^m factorial designs of resolution V. TR#225, Statistical Research Group, Hiroshima University, Hiroshima.

[3] Kuwada, M. (1989): Analysis of variance of balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. Commun. Statist.-Theory Meth. 18, 3883-3905.

[4] Kuwada, M. and R. Nishii (1979): On a connection between balanced arrays and balanced fractional s^m factorial designs. J. Japan Statist. Soc. 9, 93-101.

[5] Kuwada, M. and R. Nishii (1988): On the characteristic polynomial of the information matrix of balanced fractional s^m factorial designs of resolution $V_{p,q}$. J. Statist. Plann. Inference 18, 101-114.