数理解析研究所講究録
第 824 巻 1993 年 112-115


# Example of Zero Viscosity Limit for Two Dimensional Nonstationary Navier–Stokes Flows with Boundary

北海道情報大学　松井伸也　( Shin'ya MATSUI )

有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ wit smooth boundary に対して、

$$(u^\nu(t,x), p^\nu(t,x)) : \quad \text{Navier-Stokes flow with initial data } u_0^\nu \text{ in } \Omega,$$

$$(\overline{u}(t,x), \overline{p}(t,x)) : \quad \text{Euler flow with initial data } \overline{u}_0(x) \text{ in } \Omega,$$

ただし、外力は、ゼロとしておく．このとき次が成立する．

**Theorem 0.** $u_0^\nu \to \overline{u}_0$ *as* $\nu \to 0$ *in* $L^2(\Omega)$ を仮定する．このとき次の命題は同値である．

(a) $$\|u^\nu(t) - \overline{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ as } \nu \to 0 \text{ uniformly in } t \in [0,T],$$

(b) $$\lim_{\nu \to 0} \nu \int_0^t \int_{\partial\Omega} \overline{u}(\tau) \cdot n \times \operatorname{rot} u^\nu(\tau)\, dS d\tau = 0 \text{ uniformly in } t \in [0,T],$$

(c) $$\nu \int_0^T \|\operatorname{grad} u^\nu(\tau)\|^2_{L^2(\Gamma_{c\nu})}\, d\tau \to 0 \text{ as } \nu \to 0 \quad (\text{by T. Kato}).$$

ここで $n = n(x)$ は、$\Omega$ の外向き単位法線とし $\Gamma_{c\nu} = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le c\nu\}$ である．

この命題を成立させる例を与えるのが、目的である．そこで $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| < 1\}$ とし Navier-Stokes flow, Euler flow として次のようなタイプのものを考える．

(1)
$$\overline{u}(x) = \overline{u}_0 = \frac{\overline{\varphi}(r)}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$
$$\overline{p}(x) = -\int_r^1 \frac{\overline{\varphi}^2(\rho)}{\rho^3}\, d\rho + \text{ constant},$$
$$u^\nu(x,t) = \frac{\varphi^\nu(r,t)}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$
$$p^\nu(r,t) = -\int_r^1 \frac{(\varphi^\nu)^2(\rho,t)}{\rho^3}\, d\rho + \text{ constant}.$$

ここで $(r,\theta)$ は, $x$ の極座標表示とし, $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(r)$ は, つぎを満たすものとする．

(2) $$\overline{\varphi}(r) = \int_0^r \rho\overline{\omega}(\rho)\, d\rho,$$

here $\overline{\omega} \in C((0,1])$ with $\overline{E} = (\int_0^1 \rho \overline{\omega}^2(\rho)\, d\rho)^{1/2} < \infty$. すると簡単な計算により

$$\operatorname{div} \overline{u} = 0 \quad \text{in } \overline{\Omega},$$

$$\overline{u} \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$\operatorname{rot} \overline{u} = \overline{\omega}_0 \quad \text{in } \overline{\Omega},$$

$$(\overline{u}, \nabla)\overline{u} = -\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \frac{\overline{\varphi}^2}{r^3} = -\nabla \overline{p} \quad \text{in } \overline{\Omega},$$

尚,

$$|\overline{\varphi}(s)|^2 \leq \int_0^s \rho^2\, d\rho \cdot \int_0^s \overline{\omega}^2(\rho)\, d\rho = \frac{1}{3} s^3 ||\overline{\omega}||^2_{L^2(0,1)}.$$

である. 故に（１）で定義された $(\overline{u}(t,x), \overline{p}(t,x))$ は、 Euler flow である. 更に

$$\begin{aligned} & u_t^\nu - \nu \Delta u^\nu + (u^\nu, \nabla) u^\nu + \nabla p^\nu \\ & = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \frac{1}{r} (\varphi_t^\nu - \nu \varphi_{rr}^\nu + \frac{\nu}{r} \varphi_r^\nu) + \nabla(-p^\nu + p^\nu) \end{aligned}$$

であるから $\psi(r,t)$ を方程式

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} & \psi_t = r\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r \quad \text{for } 0 < r < 1, 0 < t < \infty, \\ & \psi_r|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=1} = 0 \quad \text{for } 0 < t < \infty, \\ & \psi|_{t=0} = \varphi_0^\nu(r) \quad \text{for } 0 < r < 1. \end{aligned}$$

の解とし

$$\text{(4)} \qquad \varphi^\nu(r,t) = \psi(r, \nu t)$$

と置くと（１）で定義された $(u^\nu(t,x), p^\nu(t,x))$ は、 Navier–Stokes flow である. ただし $\varphi_0^\nu$ は

$$u_0^\nu(x) = \frac{\varphi_0^\nu(r)}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_0^\nu(0) = (\varphi_\nu)'(0) = 0,$$

$$\omega_0^\nu(r) \equiv \frac{(\varphi_0^\nu)'(r)}{r} \quad \text{with } E^\nu = \left(\int_0^1 \rho \omega_\nu^2(\rho)\, d\rho\right)^{1/2} < \infty.$$

尚, $\operatorname{rot} u_0^\nu = \omega_\nu$, $\varphi_0^\nu(r) = \int_0^r \rho \omega_\nu(\rho)\, d\rho$ となるが、 $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ は必ずしも満たさない事に、注意して欲しい.

方程式（３）の解の存在については

**Theorem** 1 ([1]). $\varphi_0^\nu \in C^{2+\alpha}([0,1])$ *for* $0 < \alpha < 1$. *Then there exists an unique solution* $\psi \in C^{2,1}(Q)$ *of (3), which satisfies* $\psi(0,t) = 0$ *and*

$$|\psi(r,t)| + |\int_0^t \psi_r(1,\tau)| + t|\psi_r(1,t)| \leq C(||\omega_\nu||_{L^2(0,1)}, T)$$

*in* $Q = \{(r,t) \in [0,1] \times [0,\infty) \,;\, (r,t) \neq (1,0)\}$.

Theorem 1 より次の存在定理を得る.

**Theorem** 2. *For the solution* $\psi$ *in Theorem 1, we define* $u^\nu$ *and* $p^\nu$ *by (1) and (4). Then* $(u^\nu, p^\nu)$ *is an unique solution such that*

$$\begin{aligned}
&u^\nu \in C^{2,1}(D) \quad \text{and} \quad p^\nu \in C^{3,1}(D),\\
&u_t^\nu, \quad \Delta u^\nu, \quad \nabla(\mathrm{rot}\, u^\nu) \in L^\infty((0,\infty); L^2(\Omega)),\\
&t|\nabla u^\nu| \leq C(||\omega_\nu||_{L^2(0,1)}, T) \quad \text{for} \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],
\end{aligned}$$

*here* $D = \{0 < |x| \leq 1, 0 < t < \infty\}$.

以上で与えられた Flow を使うと Zero viscosity limit の例は次で与えられる.

**Theorem** 3 ( M. −川島). $||u_0^\nu - \overline{u}||_{L^2(\Omega)} \to 0$, $\nu^{3/4}||\mathrm{rot}\, u_0^\nu||_{L^2(\Omega)} \to 0$ as $\nu \to 0$ を仮定する. このとき $T > 0$ : *fixed* に対して次が成立する.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} ||u^\nu(t) - \overline{u}||_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{as} \quad \nu \to 0.$$

この証明は, 次のエネルギー不等式により成される.

**Lemma** (川島). $\psi$ を *Theorem 1* の解とする. このとき次を得る.

$$e^{4t}\int_0^1 \frac{\psi^2(t)}{r^3} + \frac{\psi_r^2(t)}{r}\, dr + \int_0^t e^{4\tau}\int_0^1 \frac{\psi^2(\tau)}{r^4} + \frac{\psi_r^2(\tau)}{r^2} + \psi_{rr}^2(\tau)\, dr d\tau +$$
$$+ \int_0^t e^{4\tau}\int_0^1 r|(\frac{\psi_r(\tau)}{r})_r|^2\, dr d\tau \leq CE_\nu$$

ここで、Cは、粘性に無関係な定数．更にこの評価を使って次を得る．

$$\int_0^1 \frac{1}{r}(\psi(t)-\overline{\varphi})^2\, dr \leq \int_0^1 \frac{1}{r}(\varphi_0^\nu-\overline{\varphi})^2\, dr + C\overline{E}E_\nu\eta(t) + C|\overline{\varphi}(1)|E_\nu\eta(t)^{3/4}.$$

ここで $\eta(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$ である．

**Reference**

**[1] Matsui, S: Example of zero viscosity limit for two dimensional nonstationary Navier–Stokes flows with boundary, to appear.**