数理解析研究所講究録
第825巻 1993年 18-31

Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty+C$ on the polydisk

神奈川大工 泉池 敬司 (Keiji Izuchi)
信州大 理 真次 康夫 (Yasuo Matsugu)

2次元 torus T^2 上では $(H^\infty+C)(T^2)=H^\infty(T^2)+C(T^2)$ は $L^\infty(T^2)$ の closed subspace であるが, algebra にはならない。しかし単位円周 T 上では $(H^\infty+C)(T)$ は $L^\infty(T)$ の closed subalgebra になる。又 Bourgain algebra に関しては, $H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$ であり $H^\infty(T)_b=(H^\infty+C)(T)_b=(H^\infty+C)(T)$ である。これらは T と T^2 の持つ性質の差の一面である。ここでは, それらの差から生ずる次の問題について考える。

問題1. $\mathcal{A}$ を $A(T^2)$ と $H^\infty(T^2)$ の間の closed subalgebra とする。いつ $\mathcal{A}+C(T^2)$ は closed subalgebra になるか?

問題2. $(H^\infty+C)(T^2)_b$ は何か?

いずれも, $(H^\infty+C)(T^2)$ の multiplier algebra $\mathcal{M}$ がその中心的な役割を果す。今後の課題として, $\mathcal{M}$ についての corona定理が成立するか等が残されてくる。

§1. Introduction

U^2で unit polydiskを表す。$H^\infty(U^2)$で有界なholomorphic関数の空間とする。その境界関数(T^2上の)の空間を$H^2(T^2)$と書く。$C(T^2)$は連続関数の空間である。Rudin [7] は$(H^\infty+C)(T^2)$が$L^\infty(T^2)$のclosed subspaceであるが、subalgebraにならないことを証明した。一方 Sarason [8] により$(H^\infty+C)(T)$は$L^\infty(T)$のclosed subalgebraになることが良く知られている。ここで$(H^\infty+C)(T^2)$のmultiplier algebraを

$$\mathfrak{M} = \{f \in L^\infty(T^2)\,;\, f\cdot(H^\infty+C)(T^2) \subset (H^\infty+C)(T^2)\}$$

とする。$\mathfrak{M}$は$L^\infty(T^2)$のclosed subalgebrになる。§2において、$\mathfrak{M} \subset H^\infty(T^2)$でありかつ$\mathfrak{M}$を決定する。その事を使って問題1に答える。

次に Cima-Timoney [3] によって導入されたBourgain algebraの定義をする。Xを単位元を持つ可換Banach環とし、Yをそのclosed subspaceとする。

$$Y_b = \{f \in X\,;\, \|ff_n+Y\| \to 0,\ \forall\{f_n\}_n \subset Y \text{ weakly null}\}$$

とする。彼らはY_bがXのclosed subalgebraになることを確かめ、Y_bをXに対するYのBourgain algebraと呼んだ。特に注意したいのは、Yがalgebraである時は$Y\subset Y_b$になるが、Yがalgebraではない時はY_bがどの程度大きな空間になるのか全く予測できない所である。その後Cima-Janson-

Yale [1] により $H^\infty(T)$ の $L^\infty(T)$ に対する Bourgain algebra は

$$H^\infty(T)_b = (H^\infty + C)(T)$$

であることが示された。これを契機に Bourgain algebra の研究が急速に広まった。Gorkin-Izuchi-Mortini [4] は

$$(H^\infty+C)(T)_b = (H^\infty+C)(T)$$

であることを示し，一般の Douglas algebra に対する Bourgain algebra を決定した。多次元上では Cima-Wogen (Izuchi [5]) は，

$$H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$$

であることを示し，[5] では単位球面上の B_n で

$$H^\infty(\partial B_n)_b = (H^\infty+C)(\partial B_n)$$

であることが示された。$(H^\infty+C)(T)_b$ は T 上では Chang-Marshall の定理があるので決定できたが，∂B_n 上ではその定理にあたるものが知られていないので，$(H^\infty+C)(\partial B_n)_b$ はまだ決定されずに残されている。一方内部に目を向けてみる。$C^\infty(U)$ で U 上の有界連続関数の空間とする。$H^\infty(U)$ の $C^\infty(U)$ に対する Bourgain algebra を考えることが出来る（境界と内部の Bourgain algebra の相互関係はまだはっきりしていない）。Cima-Stroethoff-Yale [2] 及び Izuchi-Stroethoff-Yale [6] は

$$H^\infty(U)_b = (H^\infty(U) + C(\overline{U}))_b = H^\infty(U) + C(\overline{U})$$

であることを示した。

以上はalgebraのBourgain algebraについての結果であるが，algebraでない時で知られているのは次のIzuchi-Stroethoff-Yale [6]による結果である。$h^\infty(U)$をU上の有界調和関数の空間とする。$h^\infty(U)$はalgebraにはならない。その$C^\infty(U)$に対するBourgain algebraは，VMO(T)空間と関係して次の形になる，

$$h^\infty(U)_b = (VMO(T) \cap L^\infty(T))^\sim + C(\overline{U}),$$

ここで~は内部へのharmonic extensionを表す。

もう一度Bourgain algebra Y_bの定義にもどってみる。YのXに対するmultiplier algebraを考えることができる，

$$\mathcal{M}(Y) = \{f \in X;\ fY \subset Y\}。$$

すると$\mathcal{M}(Y) \subset Y_b \subset X$であることは明らかであり，又$Y_b$がYのmultiplierの概念を少し広げたものであることが気ずかれる。Y_bは$fY \overset{\cdot}{\subset} Y$なる$f \in X$の集まりであると考えられる。この意味からするとBourgain algebraの研究はclosed subspaceに内在するalgebraの研究といっても良いであろう。又特に$\mathcal{M}(h^\infty(D)) = \mathbb{C}$であることから，$h^\infty(D)_b$の決定はそれなりに意味があることと思える。

さて$(H^\infty + C)(T^2)$もalgebraではない，closed subspace

であった。§3において，その $L^\infty(T^2)$ に対する Bourgain algebra は

$$(H^\infty+C)(T^2)_b = \mathcal{M}_b = \mathcal{M}$$

となることを見る。

§4においては，$C^\infty(U^2)$ に対する Bourgain algebra を考えてみる。~は Poisson 積分による内部への拡張を表すことにする。$C_{T^2}(\bar{U}^2)$ で $C(\bar{U}^2)$ の中の関数で T^2 上で 0 になるものとする。$C_0(U^2) \subset C_{T^2}(\bar{U}^2) \subset C(\bar{U}^2)$ である。その時，

$$(\tilde{\mathcal{M}})_b = (H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))_b = (H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathcal{M}}+C_0(U^2)$$

である。ここで高階の Bourgain algebra を $Y_{b(n+1)} = (Y_{b(n)})_b$ とする。興味ある結果として

$$(\tilde{\mathcal{M}}+C_0(U^2))_{b(n)} \neq (\tilde{\mathcal{M}}+C_0(U^2))_{b(n+1)};$$

$$(\tilde{\mathcal{M}}+C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} = (\tilde{\mathcal{M}}+C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n+1)}$$

が得られる。

§5において，polydisk algebra $A(T^2)$ 及び $A(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra について述べる。

§2. multiplier algebra $\mathcal{M}$

$f \in L^\infty(T^2)$ に対して

$$I_k(f)(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi/2\pi \quad \text{a.e. } e^{i\theta} \in T;$$

$$J_k(f)(e^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\varphi})\, e^{-ik\theta}\, d\theta/2\pi \quad \text{a.e. } e^{i\varphi} \in T$$

を定義することができる。$\|I_k(f)\|_T \leq \|f\|_{T^2}$である。又$f \in H^\infty(T^2)$である必要十分条件は$I_k(f) = J_k(f) = 0$ a.e. on T $\forall k < 0$となる。特に$f \in H^\infty(T^2)$とすると

(1) $\tilde{f}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) z^n, \quad (z,w) \in U^2$

と表せる。$f_n(z), g_n(w) \in H^\infty(U)$であり，その境界関数は

$$f_n(e^{i\theta}) = I_n(f)(e^{i\theta}), \quad g_n(e^{i\varphi}) = J_n(e^{i\varphi})$$

であることが容易に示せる。これを使って$\mathfrak{M}$は次の様に特徴づけられる。

定理 2.1. $\mathfrak{M} = \{f \in H^\infty(T^2) ; I_k(f), J_k(f) \in A(T) \ \forall k \geq 0\}$.

上の定理を(1)の言葉でいいかえると，

$$\mathfrak{M} = \{f \in H^\infty(T^2) ; f_n, g_n \in A(\overline{U}) \ \forall k \geq 0\}$$

となる。$\mathfrak{M}$に入る関数の例としては，$h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \in H^\infty(U)$に対して$f(z,w) = h(zw)$を考えれば良い。

系 1. $f \in H^\infty(T^2)$とする。$f \in \mathfrak{M}$である必要十分条件は$\tilde{f}$が$\overline{U}^2 \setminus T^2$へ連続に拡張できることである。

次に問題1について考える。$f \in H^\infty(T^2)$に対して，次の様に表すこともできる

(2) $\quad f(e^{i\theta}) = F_n(e^{i\theta}, e^{i\psi}) + e^{in(\theta+\psi)} G_n(e^{i\theta}, e^{i\psi})$,

ここで $F_n, G_n \in H^\infty(T^2)$ で $\hat{F}_n(i,j) = 0 \ \forall i,j \geq n \geq 0$ である。$A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra $\mathcal{A}$ が *-invariant であるとは各 $f \in \mathcal{A}$ に対して(2)の形に表した時，$G_n \in \mathcal{A} \ \forall n \geq 0$ の時にいうことにする（これは T 上の *-invariant の自然な拡張である [8]）。

系 2. $\mathfrak{M}$ は *-invariant である。

Rudin [7] により $\mathcal{A} + C(T^2)$ は closed subspace になることは分っている。

定理 2.2. $\mathcal{A}$ を $A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra とする。その時 $\mathcal{A} + C(T^2)$ が closed subalgebra になる必要十分条件は $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$ であり，$\mathcal{A}$ は *-invariant になることである。

系 3. $\mathfrak{M} + C(T^2)$ は closed subalgebra である。

§ 3. $(H^\infty + C)(T^2)$ の Bourgain algebra

定理3.1.　$(H^\infty+C)(T^2)_b = \mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}$.

これを証明するのに，次の補題を使う。ここで $f\in H^\infty(T^2)$ に対して $\tilde{f}(z,w)$ は w を固定した時 z に関して $\tilde{f}(\cdot,w)\in H^\infty(U)$ であるから，その境界関数を $\tilde{f}(e^{i\theta},w)$ で表す。

補題. $f\in H^\infty(T^2)$ で $I_k(f)\notin A(T)$ for some $k\geq 0$ とする。その時，$0<r<1$ に対して

$$\sup_{|w|=r} \|\tilde{f}(e^{i\theta},w)+C(T)\|_T > r^k\|I_k(f)+C(T)\|_T/2 \neq 0$$

である。

定理3.1の証明の一部分。$\mathfrak{M}_b=\mathfrak{M}$ となることだけを証明してみる。$\mathfrak{M}$ は algebra であるから，$\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_b$ である。$\mathfrak{M}\subset H^\infty(T^2)$ であるから，[5] より $\mathfrak{M}_b\subset H^\infty(T^2)$ である。$\mathfrak{M}_b\subset\mathfrak{M}$ を示すために $f\in\mathfrak{M}_b$ とする。$f\notin\mathfrak{M}$ と仮定する。定理2.1よりある $k\geq 0$ に対して $I_k(f)\notin A(T)$ と考えて良い。補題より次をみたす列 $\{w_n\}_n\subset U$ が取れる，

(3)　$|w_n|\to 1$;

(4)　$\|\tilde{f}(e^{i\theta},w_n)+C(T)\|_T > \|I_k(f)+C(T)\|_T/3 \neq 0$.

(3) より $A(T)$ の中の weakly null sequence $\{f_n(e^{i\psi})\}_n$ で $\tilde{f}_n(w_n)=1$ なるものが存在する。$A(T)\subset H^\infty(T^2)$ と考える

ことができて，h_n は $\mathcal{M}$ の weakly null sequence となる。すると $h \in \mathcal{M}$ に対して

$$\|f h_n(e^{i\psi}) + h\|_{T^2} \geq \sup_{|z|<1} |\tilde{f}(z, w_n)\hat{h}_n(w_n) + \hat{h}(z, w_n)|$$
$$\geq \|\tilde{f}(e^{i\theta}, w_n) + A(T)\|_T$$
$$> \|I_B(f) + C(T)\|_T / 3 \qquad \text{by } (4)$$

となり，$\|f h_n + \mathcal{M}\|_{T^2} \not\to 0$ $(n \to \infty)$ である。よって $f \notin \mathcal{M}_b$ となり矛盾が生ずる。

系3より $\mathcal{M} + C(T^2)$ はclosed subalgebra になるが，$(\mathcal{M} + C(T^2))_b = \mathcal{M} + C(T^2)$ となるかどうか分っていない。その原因は T^2 上でやはりChang-Marshall の定理にあたる結果が知られていない所にある。

§4. $C^\infty(U^2)$ に対するBourgain algebra について

$\mathcal{M}$ 及び $H^\infty(T^2)$ の T^2 上のBourgain algebra の結果を使うと，比較的容易に次を示すことができる。

定理4.1. (i) $(\tilde{\mathcal{M}})_b = \tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2)$.

(ii) $H^\infty(U^2)_b = (H^\infty + C_0)(U^2)$.

次に $(\tilde{\mathcal{M}})_{bb} = (\tilde{\mathcal{M}} + C_0(U^2))_b$ 及び $H^\infty(U^2)_{bb} = (H^\infty +$

$C_0)(U^2)_b$ を決定しようということになる。ここからの話しは $\partial\bar{U}^2\setminus T^2$ における関数の挙動が関係してくる。系1より，$\mathcal{M}$ の関数は $\partial\bar{U}^2\setminus T^2$ で連続（に拡張できる）であるが（関数があまり多くないということ），$H^\infty(U^2)$ は複雑に動きうる（関数が多くあるということ）。ここがこ以下の結果の形が異なるものに対する大もとである。

定理4.2. $n\geq 1$ に対して，

$$H^\infty(U^2)_{b(n)}=(H^\infty+C_0)(U^2)_{b(n)}=(H^\infty+C_0)(U^2).$$

$(H^\infty+C_0)(U^2)$ は algebra であるから，その Bourgain algebra は $(H^\infty+C_0)(U^2)$ より大きくなるが，本当に大きくなり得ないのは，$H^\infty(U^2)$ が多くの関数を含み，かつ種々の weakly null sequence を作ることが可能であるためである。

さて，

$$C_{T^2}(\bar{U}^2)=\{f\in C(\bar{U}^2);\ f=0 \text{ on } T^2\}$$

であり，$C_0(U^2)\subset C_{T^2}(\bar{U}^2)\subset C(\bar{U}^2)$ であった。$(H^\infty+C_0)(U^2)$ は algebra になるが，$H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2)$ 及び $H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2)$ は algebra ではない $C^\infty(U^2)$ の closed subspace である。そしてその境界関数は

(5) $\qquad (H^\infty+C_0)(U^2)|_{T^2}=H^\infty(T^2);$

(6) $\quad (H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))|_{T^2} = H^\infty(T^2)$;

(7) $\quad (H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))|_{T^2} = (H^\infty+C)(T^2)$

である。上の様な差があるにもかかわらず，次が成立する。

定理4.3.

$$(H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = (H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2).$$

$(H^\infty(U^2)+C(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2)$ の方は定理3.1及び4.1を見ると納得し易い。しかし定理4.2, (5), (6) から見た時，$(H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b = \tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2)$ となるのは想像するのが難かしい。そこで，$f \in H^\infty(U^2)\setminus\tilde{\mathfrak{M}}$ とする。系1より f は $\partial\bar{U}^2\setminus T^2$ のある点で連続に拡張できない。その性質を使って $C_{T^2}(\bar{U}^2)$ の中にうまく weakly null sequence を見つけて $f \notin (H^\infty(U^2)+C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$ を示せる。

さて最後に残されてくるのが，$\tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2)$, $\tilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\bar{U}^2)$, $\tilde{\mathfrak{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra の決定である。

$\tilde{\mathfrak{M}} + C(\bar{U}^2)|_{T^2} = \mathfrak{M} + C(T^2)$ でその Bourgain algebra は決定されていないから，$\tilde{\mathfrak{M}} + C(\bar{U}^2)$ の Bourgain algebra は決定されずに残る。前の2つについて考える。

定理4.4. (i) $(\tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (\tilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2))_{b(n+1)}$.

(ii) $\quad (\widetilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\overline{U}^2))_{b(n)} = (\widetilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\overline{U}^2))_b$
$\neq \widetilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\overline{U}^2)$.

$(\widetilde{\mathfrak{M}} + C_0(U^2))_{b(n)}$ 及び $(\widetilde{\mathfrak{M}} + C_{T^2}(\overline{U}^2))_b$ を具体的に記述することができるが，記号が複雑になるのでここでは述べない。[5]において，任意の $A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra $\mathcal{A}$ に対して，$L^\infty(T^2)$ に対する Bourgain algebra に関して $\mathcal{A}_{bb} = \mathcal{A}_b$ かという問題が出されているが（まだ未解決），定理4.1と4.4より同じ種類の問題を $A(\overline{U}^2)$ と $H^\infty(U^2)$ の間に考えると，$\widetilde{\mathfrak{M}}$ はその反例を与える。

§5. Polydisk algebra の Bourgain algebra

X を $L^\infty(T^2)$ の maximal ideal space とする。$L^\infty(T^2) = C(X)$ と考えられる。$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in T^2$ に対する fiber を

$$X_\lambda = \{x \in X;\ z(x) = \lambda_1,\ w(x) = \lambda_2\}$$

とする。$f \in L^\infty(T^2)$ に対して

$$\omega_0(f, \lambda) = \sup\{|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)|;\ \lambda_1, \lambda_2 \in X_\lambda\}$$

とする。$V(T^2)$ で $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\{\lambda \in T^2;\ \omega_0(f,\lambda) > \varepsilon\}$ が有限集合となる $f \in L^\infty(T^2)$ よりなる空間とする。[5]で

$$A(T^2)_{b(n)} = (H^\infty \cap V)(T^2)$$

となることが示されている。ここで $(H^\infty \cap V)(T^2) \subset \mathfrak{M}$ である

る。$A(\bar{U}^2)$ の $C^\infty(U^2)$ に対する Bourgain algebra を考えると $\widetilde{\mathfrak{N}\mathcal{C}}$ の時と様子が少し異なる。定理4.4と比較するとおもしろい。

定理 5.1.

(i) $A(\bar{U}^2)_b = ((H^\infty \cap V)(T^2)^\sim)_b = (H^\infty \cap V)(T^2)^\sim + C_0(U^2)$.

(ii) $A(\bar{U}^2)_{b(n)} \neq A(\bar{U}^2)_{b(n+1)}$.

(iii) $((H^\infty \cap V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)}$

$$= ((H^\infty \cap V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2))_b$$

$$\neq ((H^\infty \cap V)(T^2)^\sim + C_{T^2}(\bar{U}^2).$$

(iv) $(A(\bar{U}^2) + C_0(U^2))_{b(n)} \neq (A(\bar{U}^2) + C_0(U^2))_{b(n+1)}$.

(v) $(A(\bar{U}^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n)} \neq (A(\bar{U}^2) + C_{T^2}(\bar{U}^2))_{b(n+1)}$.

それぞれの Bourgain algebra を記述することができる。

参考文献

1. J. Cima, S. Janson and K. Yale, Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 121-125.
2. J. Cima, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras on the unit disk, to appear in Pacific J. Math.

3. J. Cima and R. Timoney, The Dunford-Pettis property for certain planner uniform algebras, Michigan Math. J. 34 (1987), 99 - 104.

4. P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Canad. J. Math. 44 (1992), 797 - 804.

5. K. Izuchi, Bourgain algebras of the disk, polydisk, and ball algebras, Duke Math. J. 66 (1992), 503 - 519.

6. K. Izuchi, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras of spaces of harmonic functions, preprint.

7. W. Rudin, Spaces of type $H^\infty + C$, Ann. Inst. Fourier Grenoble 25 (1975), 99 - 125.

8. D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 286 - 299.