数理解析研究所講究録
第825巻1993年140-147


# 集積値問題とファイバー環

大同工業大学　成田淳一郎
(Junichiro Narita)

## 1. 準備と目標

平面領域 $D$ の $H^\infty(D)$ の極大イデアル空間を $\mathcal{M}(D)$, シロフ境界を $Ш(D)$ で表す。$\mathcal{M}(D)$ の $\zeta \in \partial D$ 上のファイバーを $\mathcal{M}_\zeta(D)$ ($D$ が有界領域のときは座標関数 $z \in H^\infty(D)$ により $\mathcal{M}_\zeta(D) = \hat{z}^{-1}(\zeta)$ と表される), ファイバー環を $A_\zeta(D) = \hat{H}^\infty(D)|_{\mathcal{M}_\zeta(D)}$, そのシロフ境界を $Ш_\zeta(D)$ と表す。$\zeta$ が $D$ の本質境界点 (essential boundary point, その点のある近傍にすべての $H^\infty(D)$ の元が有界正則に拡張されるのでない) であれば $Ш_\zeta(D) = Ш(D) \cap \mathcal{M}_\zeta(D)$ である。

$\pi: \Delta \to D$ を普遍被覆写像とすると $\pi$ は $\mathcal{M}(\Delta)$ から $\mathcal{M}(D)$ への連続写像に拡張出来, 拡張した写像も $\pi$ で表すことにする. 原点 $0 \in \mathcal{M}(\Delta)$ に対する $Ш(\Delta)$ 上の一意的な表現測度を $\nu_0$ とすると, その $\pi$ による像測度 $\lambda_{z_0} = \pi^*(\nu_0)$ ($z_0 = \pi(0)$) は $z_0$ に対し $\pi$ の取り方によらず定まり, これを $z_0$ に対する $\mathcal{M}(D)$

上の調和測度と呼ぶ。 $\mathrm{supp}\,\lambda_z$ は $z \in D$ によらないので，これを単に $\mathrm{supp}\,\lambda$ と表す。任意の $f \in H^\infty(D)$ に対し $f(z) = \int_{\mathcal{M}(D)} \hat{f}\, d\lambda_z$ が成り立ち，これから $\mathrm{supp}\,\lambda \supset Ш(D)$ が従う。(cf. [3] Chapter 7, [4])

$f \in H^\infty(D)$ の $\zeta$ での集積値集合 $\mathcal{C}l(f, \zeta)$, range $R(f, \zeta)$ を

$$\mathcal{C}l(f, \zeta) = \{ w \in \mathbb{C} \,;\, {}^{\exists} z_n \in D \text{ s.t. } z_n \to \zeta,\ f(z_n) \to w \}$$

$$R(f, \zeta) = \{ w \in \mathbb{C} \,;\, {}^{\exists} z_n \in D \text{ s.t. } z_n \to \zeta,\ f(z_n) = w \}$$

とおく。集積値定理（[2]）により $\mathcal{C}l(f, \zeta) = \hat{f}(\mathcal{M}_\zeta)$． また $S \subset \partial D$ に対し

$$\mathcal{C}l_S(f, \zeta) = \{ w \in \mathbb{C} \,;\, {}^{\exists} \zeta_n \in S,\ {}^{\exists} w_n \in \mathcal{C}l(f, \zeta_n) \text{ s.t. } \zeta_n \to \zeta,\ w_n \to w \}$$

とおく。 M. Tsuji は次のことを示した（[8] Th VIII. 41）

「 $E \subset \partial D$ の対数容量が 0 で $\zeta \in E$ のとき集合

(*) $$\mathcal{C}l(f, \zeta) \setminus [\, \mathcal{C}l_{\partial D \setminus E}(f, \zeta) \cup R(f, \zeta) \,]$$

は対数容量 0 である。」

また A.J. Lohwater [6] は $D = \Delta = \{ |z| < 1 \}$， $E \subset \partial D$ の長さ 0 のときにも， $\zeta \in E$ に対し集合 (*) の対数容量が 0 であることを示した。これらの結果の関数環からのアプローチとして，T.W. Gamelin [5] が次の 2 つの定理を示している。

<u>定理 A</u>　 ${}^{\forall} \zeta \in \partial D$, ${}^{\forall} f \in H^\infty(D)$ に対し

$$\hat{f}(\mathcal{M}_\zeta) \setminus [\, \hat{f}(Ш_\zeta) \cup R(f, \zeta) \,]$$ は解析容量 0 である。

<u>定理B</u>　$\forall \zeta \in \partial D$, $\forall f \in H^\infty(D)$ に対し

$\hat{f}(\mathcal{M}_\zeta) \setminus [\hat{f}(\mathcal{M}_\zeta \cap \operatorname{supp}\lambda) \cup R(f,\zeta)]$ は対数容量 $0$ である。

Gamelin はこの定理Aが，結論をこれ以上小さな集合でおきかえられないという意味で strict なことを示す例をあげているが，ここではそれをやや拡張した次の形で示したい。

<u>定理1</u>　任意の，境界が本質境界点ばかりからなる有界領域 $D$ 内の，解析容量 $0$ の相対閉部分集合 $S$ に対し，定理Aの集合が $S$ に一致する場合がある。

$\Delta = \{|z| < 1\}$ のときには $Ш_\zeta(\Delta) = \mathcal{M}_\zeta(\Delta) \cap \operatorname{supp}\lambda$ であるから定理Aの集合は定理Bの集合と一致し，対数容量 $0$ になる。Gamelin は $D$ の全ての境界が本質境界点のときには定理Aが strict かどうか，特に対数容量 $0$ に変えられないかという問題を出しているが，例えば次のような場合にも対数容量 $0$ に出来ることがわかった。$\Delta_0 = \{0 < |z| < 1\}$ から原点にのみ集積する互いに交わらない $\Delta_0$ 内の閉円板列を除いて得られる領域を $\Delta$ 領域と呼ぶ。

<u>定理2</u>　$D$ が境界の長さが有限な $\Delta$ 領域のときには

$\hat{f}(\mathcal{M}_\zeta) \setminus [\hat{f}(Ш_\zeta) \cup R(f,\zeta)]$ は対数容量 $0$ である。

## 2. 定理1の証明

有界領域Dの形式的な可算無限個の disjoint union を $D\times\mathbb{N}$ で表し，この上の有界正則関数の全体を $H^\infty(D\times\mathbb{N})$，その極大イデアル空間を $\mathcal{M}(D\times\mathbb{N})$ で表す。各 $D\times\{n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ でDの座標を値として持つ関数を $Z\in H^\infty(D\times\mathbb{N})$ で表す。

1つの複素平面に含まれる，各 $D_n$ がDと相似で互いに交わらない可算無限個の領域の列 $\{D_n\}$ が，どの $D_n$ の閉包にも含まれない1点 $a$ にのみ集積しているとき，$H^\infty(D\times\mathbb{N})$ は $H^\infty(\cup D_n)$ と同型で，よって $\mathcal{M}(D\times\mathbb{N})$ も $\mathcal{M}(\cup D_n)$ と同相である。以下この同一視により，$\mathcal{M}(\cup D_n)$ に関する記号 $\mathcal{M}_a(\cup D_n)$，$\text{Ш}_a(\cup D_n)$ 等も用いるが，これらは $\mathcal{M}(D\times\mathbb{N})$ の部分集合としては $\{D_n\}$，$a$ の取り方によらない。なお $Z$ は $\cup D_n$ 全体の座標関数とはもちろん異なる。$a$ は $\cup D_n$ の本質境界点なので $\text{Ш}_a(\cup D_n)=\mathcal{M}_a(\cup D_n)\cap\text{Ш}(\cup D_n)$.

<u>補題1</u>　Dの全ての境界点が本質境界点のとき

$$\hat{Z}(\text{Ш}_a(\cup D_n)) = \partial D$$

（証明）正則関数に対する最大値の原理により $\text{Ш}(\cup D_n)$ は

$$\overline{\mathcal{M}(\cup D_n)\setminus[(\cup D_n)\cup\mathcal{M}_a(\cup D_n)]}$$

に含まれ，

$$\hat{Z}(\mathcal{M}(\cup D_n)\setminus[(\cup D_n)\cup\mathcal{M}_a(\cup D_n)]) = \partial D$$

より $\hat{Z}(\text{Ш}(\cup D_n))\subset\partial D$ .

また各 $\zeta\in\partial D$ は $D$ の本質境界点なので，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$h\in H^\infty(D)$ を，$\|h\|_\infty=1$，$h$ は $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-\zeta|>\varepsilon\}$ に正則に拡張出来てそこで $|h|<1$，をみたすように取れる（cf. [3] Th 3.1 の証明）。$H^\infty(D\times\mathbb{N})$ の各 $D\times\{n\}$ で $h$ に等しい関数を $H$ とすると，[7] の Lemma より任意の $\eta\in\overline{D}$ に対して $\hat{H}(\hat{Z}^{-1}(\{\eta\}))=\{h(\eta)\}$ となるから $|H|$ を考えて，シロフ境界 $\text{Ш}(\cup D_n)$ は $\hat{Z}^{-1}(\{z\,;\,|z-\zeta|\le\varepsilon\})$ と交わることがわかる．$\varepsilon>0$ は任意であったから $\hat{Z}^{-1}(\{\zeta\})$ とも交わる．（証明終）

$\Delta_0=\{0<|z|<1\}$ 内の閉集合列 $\{E_n\}$ を

- 各 $\hat{\mathbb{C}}\setminus E_n$ は $D$ に等角同値で，$\hat{\mathbb{C}}\setminus E_n$ 内の原点 $0$ が $D$ の1点 $p$ に対応している．
- $\Delta_0$ に含まれる円板列 $\Delta_n=\{|z-c_n|<r_n\}$，$W_n=\{|z-c_n|<s_n\}$ で，$E_n\subset\Delta_n\subset W_n$ $(n=1,2,\cdots)$，$\{W_n\}$ は互いに交わらない，$c_n\to 0$ $(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{s_n}<\infty$ をみたすものが取れる．

の各条件をみたすように取る．このとき Behrens [1] の一連の定理により，$V=\Delta_0\setminus\cup E_n$ とおくとファイバー $\mathcal{M}_0(V)$ は $\mathcal{M}a(\cup D_n)$ から $\hat{Z}^{-1}(p)$ を1点に同一視して得られる商空間と同相であり，ファイバー内のシロフ境界も一致する．また，各 $\hat{\mathbb{C}}\setminus E_n$ で $D$ との等角同値により $D$ の座標関数 $z\in H^\infty(D)$ に対応する関数を $f_n(z)\in H^\infty(\hat{\mathbb{C}}\setminus E_n)$ とするとき

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(z) - p) + p \in H^\infty(V)$$

であり，この関数が $\mathcal{M}_0(V)$ 上取る値は上の同一視により，$\hat{\Sigma}$ が $\mathcal{M}_a(\cup D_n)$（の商空間）上取る値と一致している．よって補題1から $\hat{f}(Ш_0(V)) = \partial D$ である．

<u>補題2</u>　$R(f, 0) = D$．

これは上の条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{S_n} < \infty$ から Rouché の定理等用いて，初等的に示せる．詳細は省略する．

さて，$U = V \setminus f^{-1}(S)$ とおくと $f^{-1}(S)$ も解析容量0であり $U$ 上の有界正則関数は全て $V$ 上の有界正則関数に拡張される。従って $H^\infty(U) \cong H^\infty(V)$，$\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(V)$ であり，

$$\hat{f}(\mathcal{M}_0(U) \setminus [\hat{f}(Ш_0(U)) \cup R(f, 0, U)]) = S$$

となる．

## 3．定理2の証明

$Ш_\zeta(D)$，$\mathcal{M}_\zeta(D) \cap \mathrm{supp}\,\lambda$ は共に $D$ の $\zeta$ の近傍での形にのみ依存して定まるので（[2], [5]），$\zeta$ が原点以外のときは $Ш_\zeta(D) = \mathcal{M}_\zeta(D) \cap \mathrm{supp}\,\lambda$ となり定理Bにより成り立つ。さらに原点でも $Ш_0(D)$，$\mathcal{M}_0(D) \cap \mathrm{supp}\,\lambda$ がそれぞれ $Ш(D) \setminus Ш_0(D)$，$\mathrm{supp}\,\lambda \setminus \mathcal{M}_0(D)$ の閉包と $\mathcal{M}_0(U)$ の共通部分であることを言えば，原点でも $Ш_0(D) = \mathcal{M}_0(D) \cap \mathrm{supp}\,\lambda$ となり定理が成り立つ。$\mathrm{supp}\,\lambda$ については $\lambda_{z_0}$ $(z_0 \in D)$ の $\hat{z}$（$z$ は座標関数）に

よる像測度が $z_0$ に対する $\partial D$ 上の普通の調和測度と一致することから $\lambda(\mathcal{M}_0(D)) = 0$. よって $\mathcal{M}_0(D) \cap \mathrm{supp}\,\lambda$ は $\mathrm{supp}\,\lambda$ の相対位相で内点を持たない。また 山$(D)$ に関しては、$f \in H^\infty(D)$ の非接境界関数を考えることにより $H^\infty(D) \subset L^\infty(\partial D)$ とみなすことが出来、山$(D)$ が $L^\infty(\partial D)$ の極大イデアル空間に一致する（[9] §4）ことからわかる。

## References


[1] M. Behrens, *The maximal ideal space of algebras of bounded analytic functions on infinitely connected domains*, Trans. A.M.S., 161 (1971), 358-380.

[2] T.W. Gamelin, *Localization of the corona problem*, Pacific J. Math., 34 (1970), 73-81.

[3] ——————, *Lectures on $H^\infty(D)$*, Univ. Nacional de la Plata, Argentine, 1972.

[4] ——————, *Iversen's theorem and fiber algebras*, Pacific J. Math., 46 (1973), 389-414.

[5] ——————, *Cluster values of bounded analytic functions*, Trans. A.M.S., 225 (1977), 295-306.

[6] A.J. Lohwater, *On the theorem of Gross and Iversen*, J. Analyse Math., 7 (1959-1960), 209-221.

[7] J. Narita, A remark on the corona problem for plone domains, J. Math. Kyoto. Univ., 25 (1985). 293-298.

[8] M. Tsuji, Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

[9] L. Zalcman, Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity, Trans. A.M.S., 144 (1969), 241-270.