

ある超越方程式の解の近似

— 山内二郎先生に捧ぐ —

元千葉大学工学部 戸田 英雄 (Hideo Toda)

千葉大学工学部 小野 令美 (Harumi Ono)

1 はじめに

渋谷の提起した問題： 1969年3月18日—20日に数理解析研究所で行われた研究集会において、渋谷政昭氏(統数研)は“有理関数による最良近似について”で、最尤推定のための超越方程式

$$e^y - xy = 1 \quad (x > 1, y > 0) \quad (1)$$

の解の逆関数の有理関数による最良近似を求める問題を提起した。ここで x はある観測データで既知とし、 y が母集団のパラメタで、これを最尤推定しようとする。戸田は1969年9月CP委員会の一つの結果を口頭発表した。最近別の変数変換を用いてこの問題の展開式と有理近似式を求めたので報告する。

$$\phi = \frac{e^{y/4} - 1}{e^{y/4} + 1} = \tanh \frac{y}{8} \quad (2)$$

とおくと、(1)式より

$$\frac{1}{x} = \frac{(1 - \phi)^4}{1 + \phi^2} \left\{ 1 + \frac{\phi^2}{3} + \frac{\phi^4}{5} + \cdots + \frac{\phi^{2n}}{2n+1} + \cdots \right\} \quad (3)$$

が得られるので、

$$\frac{1}{4} \log x = \phi + \frac{2}{3} \phi^2 + \frac{1}{3} \phi^3 + \frac{4}{45} \phi^4 + \cdots \quad (4)$$

と展開できる。さらに、

$$\log\left(1 + \frac{1}{4} \log x\right) = \phi + \frac{1}{6} \phi^2 + 0 \phi^3 - \frac{1}{20} \phi^4 + \cdots \quad (5)$$

$$\log\left(1 + \log\left(1 + \frac{1}{4} \log x\right)\right) = \phi - \frac{1}{3} \phi^2 + \frac{1}{6} \phi^3 - \frac{53}{360} \phi^4 + \frac{14}{45} \phi^5 - + \cdots \quad (6)$$

と展開できる. そこで (6) 式の左辺を t とおき逆転すると

$$\phi = t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{18}t^3 + \frac{59}{1080}t^4 - \frac{121}{810}t^5 - \dots \\ + \frac{275711058710671559373317}{4938327304653270528000000}t^{20} + \dots \quad (7)$$

という結果が MACSYMA により求められた. (7) 式は

$$0 < t < \frac{1}{2}, \quad 0 < \phi < \frac{1}{2} \quad (8)$$

で使用される.

$$\tau = t - \frac{1}{4} \quad \left(-\frac{1}{4} < \tau \leq \frac{1}{4}\right) \quad (9)$$

$$\tau \stackrel{d}{=} \frac{1}{4} \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi) \quad (10)$$

の区間を

$$0 \leq \theta \leq \frac{92}{96}\pi \quad (11)$$

と定め, 有理関数

$$\phi \simeq \frac{p_0 + p_1\tau + p_2\tau^2 + p_3\tau^3}{1 + q_1\tau + q_2\tau^2} \quad (12)$$

で近似する. このときの相対誤差を δ と書くとき δ を (11) 式の範囲でミニマックス化する.

2 山内の折りたたみ法

山内二郎はこの種の問題に対していわゆる山内の折りたたみ計算法と呼ばれる相対誤差一様最良化有理関数近似の手法を開発した (1964). そこでこの山内法をこの問題に適用する. 一般に

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots, \quad -2u \leq x \leq 2u \quad (13)$$

の Padé 近似を

$$f(x) \simeq \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3}{1 + q_1x + q_2x^2} \quad (14)$$

とおく. この分母を払い x のべきについて項別に等しくなるように係数を決めると x^5 の項まで合わせることができる. こうして定まる q_1, q_2 を用いて誤差項は

$$f_6 + q_1f_5 + q_2f_4 \stackrel{d}{=} p_6$$

$$f_7 + q_1f_6 + q_2f_5 \stackrel{d}{=} p_7$$

$$f_8 + q_1f_7 + q_2f_6 \stackrel{d}{=} p_8$$

...

と書ける. $f(x)$ の一様最良近似を

$$f(x) \simeq \hat{f}(x) = \frac{(p_0 + A_0) + (p_1 + A_1)x + (p_2 + A_2)x^2 + (p_3 + A_3)x^3}{1 + (q_1 + B_1)x + (q_2 + B_2)x^2} \quad (15)$$

とにおいて修正量 $A_0, A_1, A_2, A_3; B_1, B_2$ を求める.

$\hat{f}(x)$ の相対誤差を E_R と書くと

$$\begin{aligned} E_R &= (\hat{f}(x) - f(x)) \cdot \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 - p_6x^6 - p_7x^7 - \dots - (B_1x + B_2x^2)f(x)}{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_6x^6 + p_7x^7 + \dots + (B_1x + B_2x^2)f(x)} \end{aligned} \quad (16)$$

である. 端の点を含めて偏差点を 7 個, 零点を 6 個持つように修正量を決めたい. $0 \leq \theta \leq \pi$ で $-2u \leq u2 \cos \theta \leq 2u$ なので

$$x \stackrel{d}{=} u(2 \cos \theta) = u(2c_1), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad c_n \stackrel{d}{=} \cos n\theta$$

とおき, $A_0, A_1, A_2, A_3; B_1, B_2$ を u のべき級数の形

$$A_0 = A_{00} + A_{01}u + A_{02}u^2 + A_{03}u^3 + \dots$$

$$A_1 = A_{10} + A_{11}u + A_{12}u^2 + A_{13}u^3 + \dots$$

$$A_2 = A_{20} + A_{21}u + A_{22}u^2 + A_{23}u^3 + \dots$$

$$A_3 = A_{30} + A_{31}u + A_{32}u^2 + A_{33}u^3 + \dots$$

$$B_1 = B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + B_{13}u^3 + \dots$$

$$B_2 = B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + B_{23}u^3 + \dots$$

とおく. また,

$$E_R \stackrel{d}{=} E_0 + E_1u + E_2u^2 + E_3u^3 + E_4u^4 + E_5u^5 + E_6u^6 + E_7u^7 + E_8u^8 + E_9u^9 + \dots \quad (17)$$

とおく. これを (16) 式に代入して分母を払うと次式が得られる.

$$\begin{aligned} \text{左辺: } & (E_0 + E_1u + E_2u^2 + E_3u^3 + E_4u^4 + E_5u^5 + E_6u^6 + E_7u^7 + E_8u^8 + \dots) \\ & \times \{p_0 + (p_1 + f_0(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \dots)) \cdot u(2c_1) \\ & \quad + (p_2 + f_0(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \dots) \\ & \quad \quad + f_1(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \dots)) \cdot u^2(2c_1)^2 \\ & \quad + (p_3 + f_1(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +f_2(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \cdots) \cdot u^3(2c_1)^3 \\
& + (f_2(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \cdots) \\
& + f_3(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \cdots)) \cdot u^4(2c_1)^4 \\
& + (f_3(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \cdots) \\
& + f_4(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \cdots)) \cdot u^5(2c_1)^5 \\
& + (p_6 + f_4(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \cdots) \\
& + f_5(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \cdots)) \cdot u^6(2c_1)^6 \\
& + (p_7 + f_5(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \cdots) \\
& + f_6(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \cdots)) \cdot u^7(2c_1)^7 \\
& + \cdots
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\text{右边: } & A_{00} + A_{01}u + A_{02}u^2 + A_{03}u^3 + A_{04}u^4 \\
& + A_{05}u^5 + A_{06}u^6 + A_{07}u^7 + \cdots \\
& + ((A_{10} + A_{11}u + A_{12}u^2 + A_{13}u^3 + A_{14}u^4 + A_{15}u^5 + A_{16}u^6 + \cdots) \\
& - f_0(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + B_{13}u^3 + B_{14}u^4 + B_{15}u^5 + B_{16}u^6 + \cdots)) \cdot u(2c_1) \\
& + ((A_{20} + A_{21}u + A_{22}u^2 + A_{23}u^3 + A_{24}u^4 + A_{25}u^5 + \cdots) \\
& - f_0(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + B_{23}u^3 + B_{24}u^4 + B_{25}u^5 + \cdots) \\
& - f_1(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + B_{13}u^3 + B_{14}u^4 + B_{15}u^5 + \cdots)) \cdot u^2(2c_1)^2 \\
& + ((A_{30} + A_{31}u + A_{32}u^2 + A_{33}u^3 + A_{34}u^4 + \cdots) \\
& - f_1(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + B_{23}u^3 + B_{24}u^4 + \cdots) \\
& - f_2(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + B_{13}u^3 + B_{14}u^4 + \cdots)) \cdot u^3(2c_1)^3 \\
& + (-f_2(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + B_{23}u^3 + \cdots) \\
& - f_3(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + B_{13}u^3 + \cdots)) \cdot u^4(2c_1)^4 \\
& + (-f_3(B_{20} + B_{21}u + B_{22}u^2 + \cdots) \\
& - f_4(B_{10} + B_{11}u + B_{12}u^2 + \cdots)) \cdot u^5(2c_1)^5 \\
& + (-p_6 - f_4(B_{20} + B_{21}u + \cdots) \\
& - f_5(B_{10} + B_{11}u + \cdots)) \cdot u^6(2c_1)^6 \\
& + (-p_7 - f_5(B_{20} + \cdots)
\end{aligned}$$

$$-f_6(B_{10} + \dots) \cdot u^7(2c_1)^7 + \dots \quad (19)$$

まず, (17) 式の $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ の項は x によらず 0 でなければならないから (18) 式と (19) 式で

$$u^0 \text{ の係数: } E_0 p_0 = A_{00} = 0 \quad (20)$$

$$u^1 \text{ の係数: } E_1 p_0 = A_{01} + (A_{10} - B_{10} f_0)(2c_1) = 0$$

$$\text{から} \quad A_{01} = 0 \quad (21)$$

$$A_{10} - B_{10} f_0 = 0 \quad (22)$$

$$u^2 \text{ の係数: } E_2 p_0 = A_{02} + (A_{11} - B_{11} f_0)(2c_1) + (A_{20} - B_{20} f_0 - B_{10} f_1)(2c_1)^2 = 0$$

$$\text{から} \quad A_{02} = 0 \quad (23)$$

$$A_{11} - B_{11} f_0 = 0 \quad (24)$$

$$A_{20} - B_{20} f_0 - B_{10} f_1 = 0 \quad (25)$$

が得られる. 以下同様にして u^5 の項までの式から次の等式が得られる.

$$u^3 \text{ の係数から} \quad A_{03} = 0 \quad (26)$$

$$A_{12} - B_{12} f_0 = 0 \quad (27)$$

$$A_{21} - B_{21} f_0 - B_{11} f_1 = 0 \quad (28)$$

$$A_{30} - B_{20} f_1 - B_{10} f_2 = 0 \quad (29)$$

$$u^4 \text{ の係数から} \quad A_{04} = 0 \quad (30)$$

$$A_{13} - B_{13} f_0 = 0 \quad (31)$$

$$A_{22} - B_{22} f_0 - B_{12} f_1 = 0 \quad (32)$$

$$A_{31} - B_{21} f_1 - B_{11} f_2 = 0 \quad (33)$$

$$-B_{20} f_2 - B_{10} f_3 = 0 \quad (34)$$

$$u^5 \text{ の係数から} \quad A_{05} = 0 \quad (35)$$

$$A_{14} - B_{14} f_0 = 0 \quad (36)$$

$$A_{23} - B_{23} f_0 - B_{13} f_1 = 0 \quad (37)$$

$$A_{32} - B_{22} f_1 - B_{12} f_2 = 0 \quad (38)$$

$$-B_{21} f_2 - B_{11} f_3 = 0 \quad (39)$$

$$-B_{20}f_3 - B_{10}f_4 = 0 \quad (40)$$

以上の式のうち, (40), (34), (22), (25), (29) から

$$A_{10} = A_{20} = A_{30} = B_{10} = B_{20} = 0 \quad (41)$$

と決まる.

つぎに, $(2c_1)^6$ を次のように変形する. すなわち, $(2c_1)^k$ は $k = 5$ まで 0 となるように決めるので $2c_6 = 2 \cos 6\theta$ と $(2c_1)^k$, $k \leq 5$ の和の形

$$(2c_1)^6 = 2c_6 + 6(2c_1)^4 - 9(2c_1)^2 + 2$$

にする. また, $(2c_1)^7$ の項は $2c_7 = 2 \cos 7\theta$ を用いて変形し, さらに $2c_5$ の式と組合せ $2c_7 - 2c_5 = U_7$ なる新たな変数を用いて

$$(2c_1)^7 = U_7 + 8(2c_1)^5 - 19(2c_1)^3 + 12(2c_1)$$

と書き換える. この U_7 は $2c_6 = 2 \cos 6\theta$ の極値をとる点で 0 となる.

以上の準備のもとに u^6 の係数を比較する.

$$\text{左辺: } E_6 p_0$$

$$\begin{aligned} \text{右辺: } & A_{06} + (A_{15} - B_{15}f_0)(2c_1) \\ & + (A_{24} - B_{24}f_0 - B_{14}f_1)(2c_1)^2 \\ & + (A_{33} - B_{23}f_1 - B_{13}f_2)(2c_1)^3 \\ & + (-B_{22}f_2 - B_{12}f_3)(2c_1)^4 \\ & + (-B_{21}f_3 - B_{11}f_4)(2c_1)^5 \\ & + (-p_6 - B_{20}f_4 - B_{10}f_5)(2c_6 + 6(2c_1)^4 - 9(2c_1)^2 + 2) \end{aligned}$$

これから (41) 式を用いて

$$E_6 p_0 = -p_6(2c_6) \quad (42)$$

$$A_{06} - 2p_6 = 0 \quad (43)$$

$$A_{15} - B_{15}f_0 = 0 \quad (44)$$

$$A_{24} - B_{24}f_0 - B_{14}f_1 = -9p_6 \quad (45)$$

$$A_{33} - B_{23}f_1 - B_{13}f_2 = 0 \quad (46)$$

$$-B_{22}f_2 - B_{12}f_3 = 6p_6 \quad (47)$$

$$-B_{21}f_3 - B_{11}f_4 = 0 \quad (48)$$

が得られる. 式 (42), (43), (48), (39), (33), (28), (24) から

$$E_6 = -\frac{p_6}{p_0}(2c_6) \quad (49)$$

$$A_{06} = 2p_6 \quad (50)$$

$$A_{11} = A_{21} = A_{31} = B_{11} = B_{21} = 0 \quad (51)$$

となる. u^7 の係数についても同様に両辺を比較し, (41), (51), (49) を用いると

$$E_7 p_0 = (-p_7 + \frac{p_6 p_1}{p_0}) U_7 - p_6 (2c_6) \quad (52)$$

$$A_{07} - 2p_6 = 0 \quad (53)$$

$$A_{16} - B_{16} f_0 = 12p_7 - 10 \frac{p_6 p_1}{p_0} \quad (54)$$

$$A_{25} - B_{25} f_0 - B_{15} f_1 = -9p_6 \quad (55)$$

$$A_{34} - B_{24} f_1 - B_{14} f_2 = -19p_7 + 10 \frac{p_6 p_1}{p_0} \quad (56)$$

$$-B_{23} f_2 - B_{13} f_3 = 6p_6 \quad (57)$$

$$-B_{22} f_3 - B_{12} f_4 = 8p_7 - 2 \frac{p_6 p_1}{p_0} \quad (58)$$

が得られ, 式 (52), (53), (58), (47), (27), (32), (38) から

$$E_7 = \frac{1}{p_0} \left((-p_7 + \frac{p_6 p_1}{p_0}) U_7 - p_6 (2c_6) \right) \quad (59)$$

$$A_{07} = 2p_6 \quad (60)$$

$$B_{12} = \left(f_2 (-8p_7 + 2 \frac{p_6 p_1}{p_0}) + 6p_6 f_3 \right) / (f_4 f_2 - f_3^2) \quad (61)$$

$$B_{22} = \frac{1}{f_2} (-6p_6 - B_{12} f_3) \quad (62)$$

$$A_{12} = B_{12} f_0 \quad (63)$$

$$A_{22} = B_{22} f_0 + B_{12} f_1 \quad (64)$$

$$A_{32} = B_{22} f_1 + B_{12} f_2 \quad (65)$$

が得られる.

これで修正項の 0 でない最初の係数と誤差の主要項 2 項の係数が得られた. 同様の操作を行えば, u の高次の項の係数が次々に得られるが, この問題の (12) 式に関しては相当高次の項まで求めないと十分な修正量は得られない. ここで得られた修正項の第 1 項で $\phi(\tau)$ を修正した $\hat{\phi}(\tau)$ の相対誤差の様子を図 1 に示す.

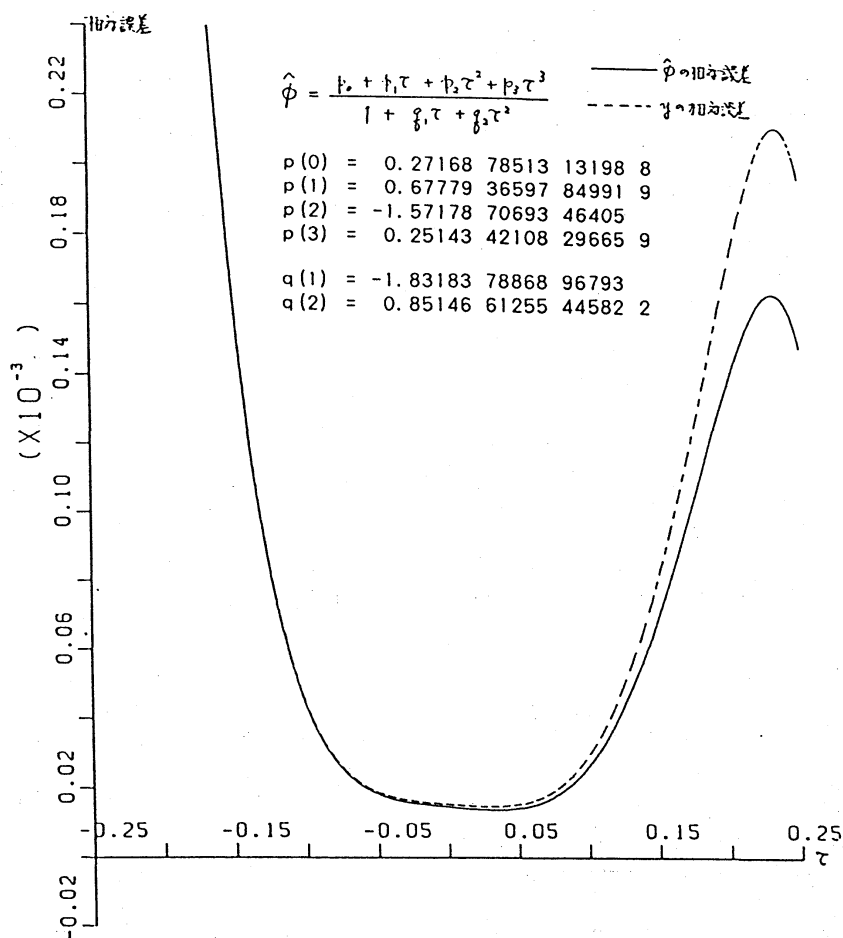


図 1: 山内の方法による修正項第 1 項で修正した $\hat{\phi}(\tau)$ の相対誤差曲線

3 数値的解法

(12) 式の様最良近似を 2 節の方法で求めようとする、修正項の収束が非常に遅いので、多くの項を求めなければならない。そこで数値的にこの修正項を求めることを試みた結果、最終的に相対誤差 δ を

$$\min \max |\delta| \doteq .2749_{10} - 4$$

と一様最良化することができた。それは次の方法による。

3.1 出発値

(16) 式の f を ϕ とおくとき 6 個の零点を持つように修正量を決めたい。そこで

$$\phi^*(\tau) = \frac{p_0 + A_0 + (p_1 + A_1)\tau + (p_2 + A_2)\tau^2 + (p_3 + A_3)\tau^3}{1 + (q_1 + B_1)\tau + (q_2 + B_2)\tau^2} \quad (66)$$

とおき, $(\phi^*(\tau) - \phi(\tau))/\phi(\tau)$ が 6 個の点

$$\tau = t_k = 2u \cos \frac{\pi}{12}k = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{12}k, \quad k = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad (67)$$

で 0 となるように修正量を求める. それには $(\phi^*(\tau) - \phi(\tau))/\phi(\tau)$ の分子が 0 になればよい.

$$\begin{aligned} & \frac{\phi^*(\tau) - \phi(\tau)}{\phi(\tau)} \\ &= \frac{1}{\phi(\tau)(1 + (q_1 + B_1)\tau + (q_2 + B_2)\tau^2)} \\ & \times (-p_6\tau^6 - p_7\tau^7 - \cdots + A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3 - B_1\tau\phi(\tau) - B_2\tau^2\phi(\tau)) \quad (68) \end{aligned}$$

から, (67) の点において (68) 式の分子を 0 にする修正量 $A_0, A_1, A_2, A_3; B_1, B_2$ を求める連立方程式は

$$\begin{aligned} A_0 + t_k A_1 + t_k^2 A_2 + t_k^3 A_3 - t_k \phi(t_k) B_1 - t_k^2 \phi(t_k) B_2 &= p_6 t_k^6 + p_7 t_k^7 + \cdots \quad (69) \\ &(k = 1, 3, 5, 7, 9, 11) \end{aligned}$$

と書ける. この方程式から得られた修正量で修正した $\phi^*(\tau)$ の相対誤差のグラフを図 2 に示す. また, Padé 近似 $\phi(\tau)$ の係数, 方程式 (69) から得られた修正量, 山内の方法により求めた修正量の第 1 項を表 1 に示す.

表 1: 係数と修正量

	parameters of Padé	modifiers by (69)	first term by Yamauti's method
p_0	2.716838687137579 ₁₀ - 1	3.834957262912029 ₁₀ - 6	3.982599440857965 ₁₀ - 6
p_1	6.59889968340175 ₁₀ - 1	2.974293959298694 ₁₀ - 2	1.790369144481687 ₁₀ - 2
p_2	-1.616801600753688	1.006973329457695 ₁₀ - 1	4.501453140728264 ₁₀ - 2
p_3	3.687494382068048 ₁₀ - 1	-7.907843921110589 ₁₀ - 2	-1.173152273771389 ₁₀ - 1
q_1	-1.897736872837986	1.094615452227288 ₁₀ - 1	6.589898594119305 ₁₀ - 2
q_2	9.708992148459961 ₁₀ - 1	-9.890090515289539 ₁₀ - 2	-1.194330893014139 ₁₀ - 1

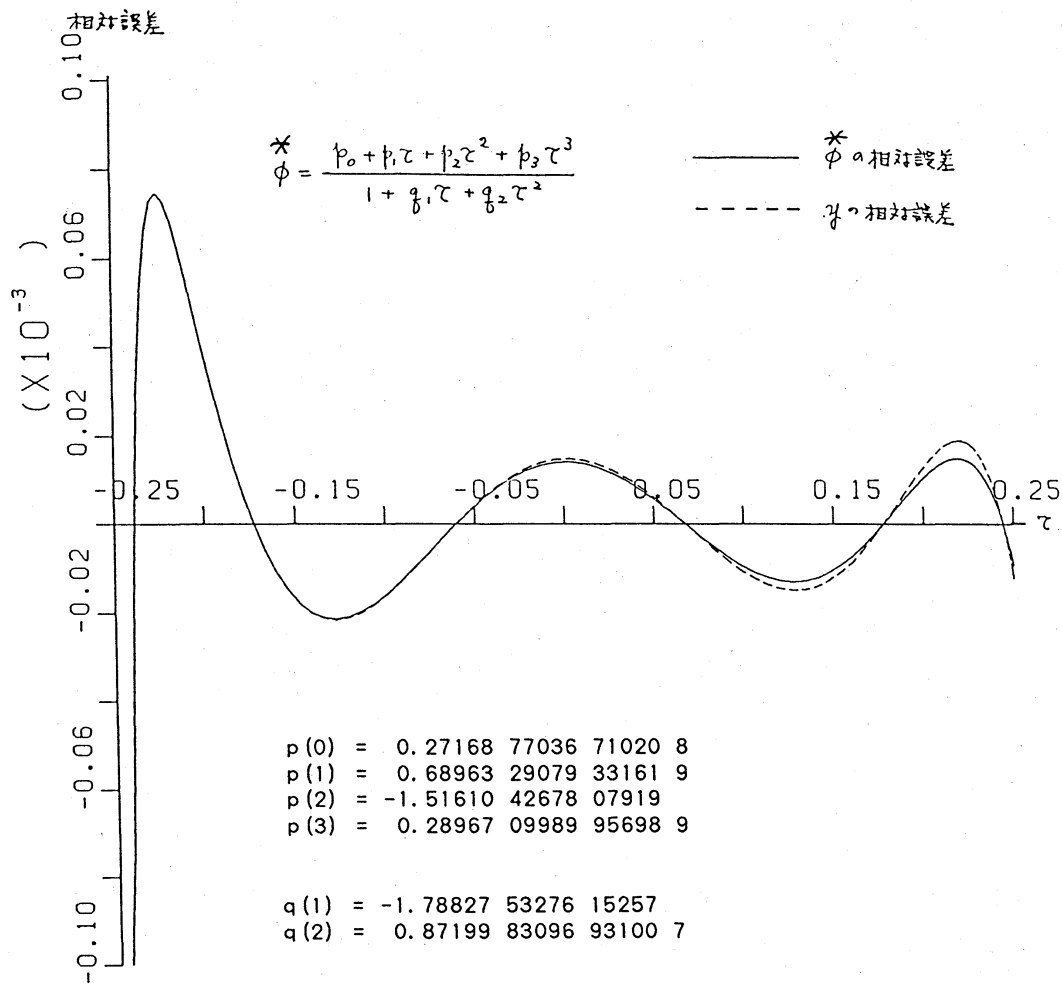


図 2: 一様最良化を求めるための初期値による $\phi^*(\tau)$ の相対誤差曲線

3.2 一様最良化

3.1節で求められた係数から出発して, (11) の範囲で一様最良化を行う.

$$E_R(\tau; p_0, p_1, p_2, p_3; q_1, q_2) = \left(\frac{p_0 + p_1\tau + p_2\tau^2 + p_3\tau^3}{1 + q_1\tau + q_2\tau^2} - \phi(\tau) \right) \frac{1}{\phi(\tau)} \quad (70)$$

とおく.

以下の手続き 2. と 3. を数値的に収束するまで繰り返す.

1. 初期値: 図 2 に示した関数値から, $\tau = 2u \cos \theta$; $\theta = \frac{92}{96}\pi, \frac{83}{96}\pi, \frac{65}{96}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{15}{96}\pi, 0$ を偏差点と仮定する.

2. 仮定した偏差点での相対誤差が交互に異符号で同じ大きさ δ となるようにパラメタ $p_0, p_1, p_2, p_3; q_1, q_2; \delta$ を Newton 法で修正する. すなわち 7 個の偏差点のところで
の連立方程式

$$\begin{aligned} \pm\delta &= E_R(\tau; p_0 + \Delta p_0, p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, p_3 + \Delta p_3; q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2) \\ &\simeq E_R(\tau; p_0, p_1, p_2, p_3; q_1, q_2) \\ &\quad + \frac{\partial E_R}{\partial p_0} \Delta p_0 + \frac{\partial E_R}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial E_R}{\partial p_2} \Delta p_2 + \frac{\partial E_R}{\partial p_3} \Delta p_3 + \frac{\partial E_R}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial E_R}{\partial q_2} \Delta q_2 \quad (71) \end{aligned}$$

を解いて修正量 $\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3, \Delta q_1, \Delta q_2$ と δ を求める. 修正量の大きさが 10^{-10} 以下になったら反復を終わる.

3. θ の範囲 $0 \leq \theta \leq \frac{92}{96}\pi$ での相対誤差により両端点を除く偏差点が極値をとる点となるように二分法で修正する.

4 回の反復でほぼ min max 化が終了した. min max 化された関数の相対誤差と係数を図 3 に示す.

4 結論

山内の方法は性質のよい関数に関しては非常に強力な方法である. 紙面の都合でここには述べないが, 山内が例としてあげている e^{-x} で, 分子も 2 次式とした例では非常に収束が速く, 第 1 項だけでも一様最良化の十分よい近似が得られる. しかし, ここで取り上げた関数に関しては相当高次の項まで数式計算で求めないとよい出発値とはならない. ここでは, 3.1 節のように数値計算技術でよい出発値が求められるので, これを用いて θ の範囲で $0 \leq \theta \leq \frac{92}{96}\pi$, x の範囲でほぼ $1.001 \leq x \leq 38.57$ で相対最大誤差約 $.2749_{10} - 4$ と一様最良化することができた. ある種の数値計算技術には, MACSYMA のような数式処理システムが非常に役立つことがあるが, “山内流の数式処理技術には逆に数値計算技術が強力な助け船になる”といえる.

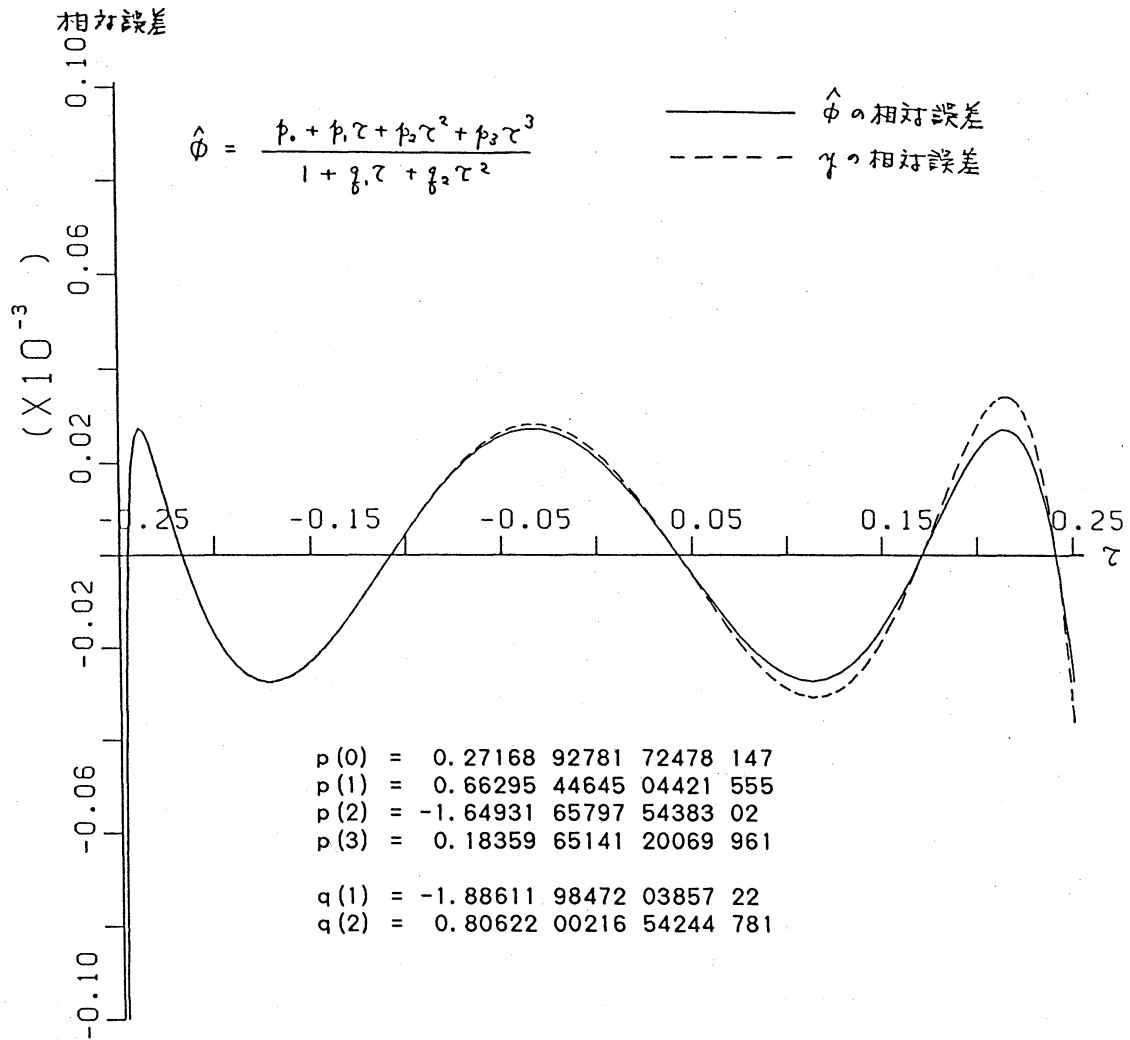


図 3: 一様最良化された $\hat{\phi}(\tau)$ の相対誤差曲線