数理解析研究所講究録
第 835 巻 1993 年 36-42

2 種の異なるサーバーを持つ並列待ち行列システムのある割当問題

鳥取大学工学部 *小柳 淳二 (KOYANAGI Junji)
河合 一 (KAWAI Hajime)

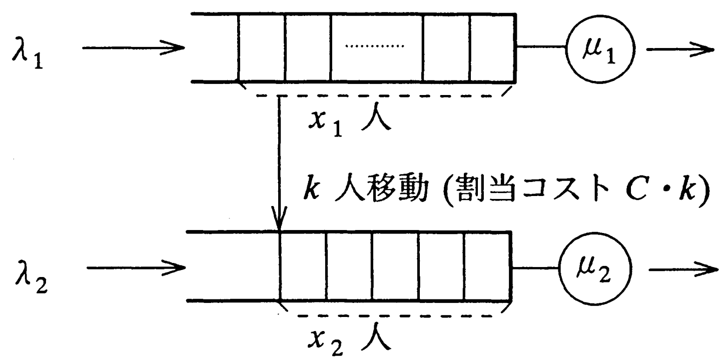
1 はじめに

2 個またはそれ以上のサービスステーションをもつ並列待ち行列システムにおいて, 到着する客を各待ち行列に割り当て, システム内人数やコストなどの最小化をはかる研究が [1], [4] 等に見られるが, 通常考えられているコストはそれぞれの待ち行列にならぶ人数に対して線形であり, また待ち行列に振り分ける際にコストがかかる場合を取り扱ったものは少ないようである.

[6] では, 2 本の待ち行列に独立に客が到着する場合を考え, 待ち行列 1 に客が到着したときに, その客を待ち行列 1 に送るか, 待ち行列 2 に送るかを, 無限期間における総期待割引コストを最小にするように決定することを考え, 最適な政策が switch-over policy であることを示したが, ここでは, 客が待ち行列 1 に到着したとき何人かの客を客数に比例した割り当てコストを支払うことにより待ち行列 2 に割り当てることができる場合を扱う.

2 システムの記述

以下の性質を持つ 2 種の指数待ち行列 1, 2 を持つ並列待ち行列システムを考える



- 窓口 1, 窓口 2 のサービス時間はそれぞれ処理率μ_1, μ_2 の指数分布に従う.
- 待ち行列 1 , 待ち行列 2 に到着する客はそれぞれ到着率λ_1, λ_2 の独立なポアソン過程に従う.
- 待ち行列 1 に x_1 人, 待ち行列 2 に x_2 人いるとき単位時間当たり $H(x)$ $(x = (x_1, x_2))$ の holding cost がかかる.
- 意思決定者は待ち行列 1, 2 を観察することができ, 決定は待ち行列 1 に客が到着したときのみ行われ, 何人の客を待ち行列 1 から 2 に移すかを決定することができる.
- 一人移すごとに割り当てコスト C がかかり, 客の移動は瞬時に行なわれるものとする.

状態として $x = (x_1, x_2)$ (x_1 は待ち行列 1 のシステム内人数, x_2 は待ち行列 2 のシステム内人数) をとり, 以下の 4 つのオペレータを定義する.

D_1: $D_1 x = ([x_1 - 1]^+, x_2)$ $\quad (D_1^k x = ([x_1 - k]^+, x_2))$

D_2: $D_2 x = (x_1, [x_2 - 1]^+)$ $\quad (D_2^k x = (x_1, [x_2 - k]^+))$

A_1: $A_1 x = (x_1 + 1, x_2)$ $\quad (A_1^k x = (x_1 + k, x_2))$

A_2: $A_2 x = (x_1, x_2 + 1)$ $\quad (A_2^k x = (x_1, x_2 + k))$

ここで $[y]^+ = \max\{0, y\}$ とする.

待ち行列 1 に客が到着し, 状態が $x = (x_1, x_2)$ になったとき (アクションをとる直前) からの最適期待割引コスト (割引率 α) を $V(x)$ とし, $U(x;k)$ は k 人移動させ, その後最適なアクションをとったときの期待割引コストをあらわすものとする. 待ち行列から退去があるか, または待ち行列 1 から客が移動させられ状態が $x = (x_1, x_2)$ になったとき (アクションをとった直後) からの最適期待割引コストを $W(x)$ とする.

$V(x)$, $W(x)$ $U(x;k)$ は以下の最適性方程式を満たすことがわかる [5] .

$$V(x) = \min_{k=0,1,\ldots x_1} U(x;k), \tag{1}$$

$$U(x;k) = Ck + W(D_1^k A_2^k x), \tag{2}$$

$$W(x) = \frac{H(x)}{\Lambda} + \frac{\lambda_1}{\Lambda} V(A_1 x) + \frac{\lambda_2}{\Lambda} W(A_2 x) + \frac{\mu_1}{\Lambda} W(D_1 x) + \frac{\mu_2}{\Lambda} W(D_2 x), \tag{3}$$

ここで $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \alpha.$

$M(x)$ として $U(x;k)$ の最小を与える k の中で最小のものをとる. すなわち

$$M(x) = \min\{\arg\min U(x;k)\}. \tag{4}$$

3 最適政策の性質

Holding cost に次の性質を仮定する.

(P) $H(x) \geq H(D_1 x)$, $H(A_2 x) \geq H(x)$

(Q) $H(D_1^2 A_2^2 x) - 2H(D_1 A_2 x) + H(x) \geq 0$

(R) $H(D_1^2 A_2 x) - H(D_1 x) - H(D_1 A_2 x) + H(x) \geq 0$

(S) $H(D_1 A_2^2 x) - H(A_2 x) - H(D_1 A_2 x) + H(x) \geq 0$

$V(x)$ にも同じ性質が存在することを以下に示す.

逐次近似法により $V^n(x)$, $W^n(x)$ を以下のように更新する.

$$
\begin{aligned}
V^0(x), W^0(x) &\equiv 0, \\
W^{n+1}(x) &= \frac{H(x)}{\Lambda} + \frac{\lambda_1}{\Lambda} V^n(A_1 x) + \frac{\lambda_2}{\Lambda} W^n(A_2 x) + \frac{\mu_1}{\Lambda} W^n(D_1 x) + \frac{\mu_2}{\Lambda} W^n(D_2 x), \qquad (5) \\
U^{n+1}(x;k) &= Ck + W^{n+1}(D_1^k A_2^k x), \qquad (6) \\
V^{n+1}(x) &= \min_{k=0,1,\dots x_1} U^{n+1}(x;k). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

性質 (P), (Q), (R), (S), を持つ関数の集合を P, Q, R, S とする.

補題 1

$W^n(x), V^n(x) \in P$.

証明)

$W^n(x)$, $V^n(x) \in P$ なら $W^{n+1}(x) \in P$ は容易に示せる.

$W^{n+1}(x) \in P$ なら $V^{n+1}(x) \in P$ は以下のようにして示すことができる.

$M(x) = K$ とする. ($K = 0$ のときは容易であるから $K \geq 1$ とする.)

$$
\begin{aligned}
&V^{n+1}(x) - V^{n+1}(D_1 x) \\
&\geq U^{n+1}(x;K) - U^{n+1}(D_1 x; K-1) \\
&\geq C + W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) - W^{n+1}(D_1^{K-1} A_2^{K-1} D_1 x) \\
&\geq W^{n+1}(A_2 y) - W^{n+1}(y) \ \ (D_1^{K-1} A_2^{K-1} D_1 x = D_1^K A_2^{K-1} x \text{ を用い}, y = D_1^K A_2^{K-1} x \text{ とする}) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

$M(A_2 x) = K$ とする

$$
\begin{aligned}
&V^{n+1}(A_2 x) - V^{n+1}(x) \\
&\geq U^{n+1}(A_2 x; K) - U^{n+1}(x;K) \\
&\geq C + W^{n+1}(D_1^K A_2^{K+1} x) - W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) \\
&\geq 0. \quad \square
\end{aligned}
$$

次に $V^n(x), W^n(x) \in Q, R, S$ を示す.

$V^n(x), W^n(x) \in Q, R, S$ なら $W^{n+1}(x) \in Q, R, S$ は容易. $V^{n+1}(x) \in Q, R, S$ を示すため以下の補題を用いる.

補題 2

$W^{n+1}(x) \in Q, R, S$ なら $U^{n+1}(x;k)$ は以下の性質を持つ

1. $U^{n+1}(x;k+2) - 2U^{n+1}(x;k+1) + U^{n+1}(x;k) \geq 0$
2. $U^{n+1}(D_1x;k+1) - U^{n+1}(D_1x;k) \geq U^{n+1}(x;k+1) - U^{n+1}(x;k)$
3. $U^{n+1}(A_2x;k+1) - U^{n+1}(A_2x;k) \geq U^{n+1}(x;k+1) - U^{n+1}(x;k)$

証明)

1. の証明

$$\begin{aligned}
&U^{n+1}(x;k+2) - 2U^{n+1}(x;k+1) + U^{n+1}(x;k)\\
&= W^{n+1}(D_1^{k+2}A_2^{k+2}x) - 2W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}x) + W^{n+1}(D_1^kA_2^kx)\\
&\geq 0. \quad (W^{n+1}(x) \in Q \text{ より})
\end{aligned}$$

2. の証明

$$\begin{aligned}
&U^{n+1}(D_1x;k+1) - U^{n+1}(D_1x;k) - U^{n+1}(x;k+1) + U^{n+1}(x;k)\\
&= W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}D_1x) - W^{n+1}(D_1^kA_2^kD_1x) - W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}x) + W^{n+1}(D_1^kA_2^kx)\\
&\geq 0. \quad (W^{n+1}(x) \in R \text{より})
\end{aligned}$$

3. の証明

$$\begin{aligned}
&U^{n+1}(A_2x;k+1) - U^{n+1}(A_2x;k) - U^{n+1}(x;k+1) + U^{n+1}(x;k)\\
&= W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}A_2x) - W^{n+1}(D_1^kA_2^kA_2x) - W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}x) + W^{n+1}(D_1^kA_2^kx)\\
&\geq 0. \quad (W^{n+1}(x) \in S \text{より}) \quad \square
\end{aligned}$$

上で得られた $U(x;k)$ の性質から, 最適アクション $M(x)$ について次のことが示される.

補題 3

$M(x) = K$ とすると

1. $M(D_1A_2x) = [K-1]^+$.

2. $M(A_1x) = K$ *or* $K+1$.

3. $M(A_2x) = K$ *or* $[K-1]^+$.

証明)

まず補題 2. の 2. 3. から $M(D_1x) \le M(x)$, $M(A_2x) \le M(x)$ に注意する.

1. の証明

$M(D_1A_2x) \le M(x)$ より $K=0$ のときは明らか. $K \ge 1$ のときは

$$
\begin{aligned}
&[U^{n+1}(D_1A_2x;k) - U^{n+1}(D_1A_2x;k-1)] - [U^{n+1}(x;k+1) - U^{n+1}(x;k)] \\
&= [W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}x) - W^{n+1}(D_1^kA_2^kx)] \\
&\quad - [W^{n+1}(D_1^{k+1}A_2^{k+1}x) - W^{n+1}(D_1^kA_2^kx)] \\
&= 0 \qquad (k=1,\ldots,x_1-1)
\end{aligned}
$$

よって $M(x)=K$ なら $M(D_1A_2x)=[K-1]^+$ が成立する.

2. の証明

$M(x)=K$ として $U^{n+1}(A_1x;K+2) - U^{n+1}(A_1x;K+1) \ge 0$ を示す.

$$
\begin{aligned}
&[U^{n+1}(A_1x;K+2) - U^{n+1}(A_1x;K+1)] - [U^{n+1}(x;K+1) - U^{n+1}(x;K)] \\
&= [W^{n+1}(D_1^{K+2}A_2^{K+2}A_1x) - W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+1}A_1x)] \\
&\quad - [W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+1}x) - W^{n+1}(D_1^KA_2^Kx)] \\
&= W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+2}x) - W^{n+1}(D_1^KA_2^{K+1}x) - W^{n+1}(D_1^{K+1}A_2^{K+1}x) + W^{n+1}(D_1^KA_2^Kx) \\
&\ge 0 \qquad (y = D_1^KA_2^Kx \text{ として } W^{n+1}(x) \in S \text{を用いる.})
\end{aligned}
$$

$U^{n+1}(x;K+1) - U^{n+1}(x;K) \ge 0$ に注意して, $U^{n+1}(A_1x;K+2) - U^{n+1}(A_1x;K+1) \ge 0$ を得る.

3. の証明

$M(A_2x) \le M(x)$ より $M(x)=0,1$ のときは明らか.

$M(x)=K(\ge 2)$ のときは $U^{n+1}(A_2x;K-1) - U^{n+1}(A_2x;K-2) < 0$ を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
&[U^{n+1}(x;K) - U^{n+1}(x;K-1)] - [U^{n+1}(A_2x;K-1) - U^{n+1}(A_2x;K-2)] \\
&= [W^{n+1}(D_1^KA_2^Kx) - W^{n+1}(D_1^{K-1}A_2^{K-1}x)] \\
&\quad - [W^{n+1}(D_1^{K-1}A_2^{K-1}A_2x) - W^{n+1}(D_1^{K-2}A_2^{K-2}A_2x)] \\
&= W^{n+1}(D_1^KA_2^Kx) - W^{n+1}(D_1^{K-1}A_2^{K-1}x) - W^{n+1}(D_1^{K-1}A_2^Kx) + W^{n+1}(D_1^{K-2}A_2^{K-1}x) \\
&\ge 0 \qquad (y = D_1^{K-2}A_2^{K-1}x \text{ として } W^{n+1}(x) \in R \text{を用いる.})
\end{aligned}
$$

$M(x)=K$ より $U^{n+1}(x;K) - U^{n+1}(x;K-1) < 0$ であるから,

$U^{n+1}(A_2x;K-1) - U^{n+1}(A_2x;K-2) < 0$ でなければならない. □

上の補題から次の補題を得る.

補題 4

$W^n(x), V^n(x) \in Q, R, S$

証明)

$W^n(x), V^n(x) \in Q, R, S$ なら $V^{n+1}(x) \in Q, R, S$ を示せばよい.

・$V^n(x) \in Q$ の証明

(i) $M(x) = 0$ のとき $M(D_1 A_2 x) = 0$, $M(D_1^2 A_2^2 x) = 0$ であるから.

$$\begin{aligned} & V^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x) - 2V^{n+1}(D_1 A_2 x) + V^{n+1}(x) \\ &= U^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x; 0) - 2U^{n+1}(D_1 A_2 x; 0) + U^{n+1}(x; 0) \\ &= W^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x) - 2W^{n+1}(D_1 A_2 x) + W^{n+1}(x) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii) $M(x) = 1$ のとき $M(D_1 A_2 x) = 0$, $M(D_1^2 A_2^2 x) = 0$ であるから.

$$\begin{aligned} & V^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x) - V^{n+1}(D_1 A_2 x) - V^{n+1}(D_1 A_2 x) + V^{n+1}(x) \\ &\geq U^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x; 0) - U^{n+1}(D_1 A_2 x; 1) - U^{n+1}(D_1 A_2 x; 0) + U^{n+1}(x; 1) \\ &= W^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x) - W^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x) - W^{n+1}(D_1 A_2 x) + W^{n+1}(D_1 A_2 x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii) $M(x) = K\ (\geq 2)$ なら $M(D_1 A_2 x) = K - 1$, $M(D_1^2 A_2^2 x) = K - 2$

$$\begin{aligned} & V^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x) - 2V^{n+1}(D_1 A_2 x) + V^{n+1}(x) \\ &= U^{n+1}(D_1^2 A_2^2 x; K-2) - 2U^{n+1}(D_1 A_2 x; K-1) + U^{n+1}(x; K) \\ &= W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) - 2W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) + W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

・$V^n(x) \in R$ の証明

(i) $M(x) = 0$ のとき $M(D_1 x) = 0$, $M(D_1 A_2 x) = 0$, $M(D_1^2 A_2 x) = 0$ であるから.

$$\begin{aligned} & V^{n+1}(D_1^2 A_2 x) - V^{n+1}(D_1 x) - V^{n+1}(D_1 A_2 x) + V^{n+1}(x) \\ &= W^{n+1}(D_1^2 A_2 x) - W^{n+1}(D_1 x) - W^{n+1}(D_1 A_2 x) + W^{n+1}(x) \\ &\geq 0 \quad (W^{n+1}(x) \in R \text{より}) \end{aligned}$$

(ii) $M(x) = K\ (\geq 1)$ のとき $M(D_1^2 A_2 x) = L$ とする $(K \geq L)$

$$\begin{aligned} & V^{n+1}(D_1^2 A_2 x) - V^{n+1}(D_1 x) - V^{n+1}(D_1 A_2 x) + V^{n+1}(x) \\ &= U^{n+1}(D_1^2 A_2 x; L) - U^{n+1}(D_1 x; L+1) - U^{n+1}(D_1 A_2 x; K-1) + U^{n+1}(x; K) \\ &= W^{n+1}(D_1^{L+2} A_2^{L+1} x) - W^{n+1}(D_1^{L+2} A_2^{L+1} x) - W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) + W^{n+1}(D_1^K A_2^K x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

・$V^n(x) \in S$ の証明

(i) $M(x)=0$ のとき $M(D_1A_2^2x)=0$, $M(A_2x)=0$, $M(D_1A_2x)=0$ であるから.

$$\begin{aligned}
&V^{n+1}(D_1A_2^2x)-V^{n+1}(A_2x)-V^{n+1}(D_1A_2x)+V^{n+1}(x)\\
&= W^{n+1}(D_1A_2^2x)-W^{n+1}(A_2x)-W^{n+1}(D_1A_2x)+W^{n+1}(x)\\
&\geq 0 \quad (W^{n+1}(x)\in S\text{より})
\end{aligned}$$

(ii) $M(x)=K\ (\geq 1)$ のとき $M(D_1A_2^2x)=L$ とする $(K\geq L)$

$$\begin{aligned}
&V^{n+1}(D_1A_2^2x)-V^{n+1}(A_2x)-V^{n+1}(D_1A_2x)+V^{n+1}(x)\\
&= U^{n+1}(D_1A_2^2x;L)-U^{n+1}(A_2x;L+1)-U^{n+1}(D_1A_2x;K-1)+U^{n+1}(x;K)\\
&= W^{n+1}(D_1^{L+1}A_2^{L+2}x)-W^{n+1}(D_1^{L+1}A_2^{L+2}x)-W^{n+1}(D_1^KA_2^Kx)+W^{n+1}(D_1^KA_2^Kx)\\
&= 0
\end{aligned}$$

よって $V^n(x)\in Q,R,S$ □

以上の補題から次の定理を得る.

定理 1

状態 $x=(x_1,x_2)$ における最適なアクションは次のような構造を持つ.

$i=x_1+x_2$ とし $M((i,0))=K_i$ とすると $M(x)=[K_i-x_2]^+$ であり,

$$K_i\leq K_{i+1}\leq K_i+1.\ \Box$$

参考文献

[1] B. Hajek, "Optimal Control of Two Interacting Service Stations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 6, pp. 491–499, 1984.

[2] D. M. Topkis, "Minimizing a Submodular Function on a Lattice", *Operations Research*, Vol. 26, No. 2, pp. 305–321, 1978.

[3] J. Walrand, "A Note on 'Optimal Control of a Queueing System with Two Heterogeneous Servers'", *Systems and Control Letters*, Vol. 4, pp. 131–134, 1984.

[4] J. Walrand, *An Introduction to Queueing Networks*, Prentice–Hall, 1988.

[5] R. F. Serfozo, " An Equivalence Between Continuous and Discrete Time Markov Decision Process", *Operations Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 616–620, 1979.

[6] 小柳淳二, 河合　一, 2 種の異なるサーバーを持つ並列待ち行列システムのある割当問題, 1992 年度日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集.