数理解析研究所講究録
第838巻 1993年 50-54

半局所化について

広島大理 大川哲介 (Tetsusuke Ohkawa)

A.K. Bousfield は [1], [2] に於いて, 空間及びスペクトラムの, 一般ホモロジーによる局所化の概念を導入した. ここでは, その類似概念である半局所化の概念を導入する.

§1. まず局所化について復習する. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を圏, $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を共変関手とする. $f\in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$ が $\mathcal{F}$-iso であるとは $\mathcal{F}(f)$ が iso なることを云う. $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ が $\mathcal{F}$-local であるとは, 任意の $\mathcal{F}$-iso $f:Y\to Z$ (in $\mathcal{A}$) に対し, $f^*: [Z,X] \xrightarrow{\text{注}} [Y,X]$ が全単射なることを云う. $f:X\to Y$ (in $\mathcal{A}$) が $\mathcal{F}$-局所化写像であるとは, f が $\mathcal{F}$-iso であり, かつ Y が $\mathcal{F}$-local となることを云う.

$\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ を CW 複体 (又ハ CW スペクトラム) の圏, $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{S}}$ をそのホモトピー圏とする. $gr\,\mathcal{A}b$ を次数付アーベル群の圏, $h:\tilde{\mathcal{C}}$ (又ハ $\tilde{\mathcal{S}}$) $\to gr\,\mathcal{A}b$ を一般ホモロジー関手とする. この時, Bousfield [1], [2] による次の基本定理が成立する.

(注: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z,X)$ を $[Z,X]$ と略記した. 以下同様)

定理0. 任意の $X\in Ob(\tilde{\mathcal{C}})$ (又ハ $Ob(\tilde{\mathcal{S}})$) に対し適当なる f, Y を取り, $f: X\to Y$ が h-局所化写像である様にする事が出来る.

この Y を $L_h X$ で表わす. これが同型を除いて一意なる事は定義よりすぐわかる. $h_*(-)=\pi_*(E\wedge(-))$ (E: スペクトラム) と書ける時, L_h を L_E とも表わす. さて $n\in\mathbb{Z}$ (又ハ $n\in\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$), $gr^n ab$ を, 次数を i より小なるものに制限した次数付アーベル群の圏とする. 一般ホモロジー h に対し関手 $(h,n): \tilde{\mathcal{C}}$ (又ハ $\tilde{\mathcal{S}}$) $\to gr^n ab$ を $(h,n)(X) = (h_i(X))_{i<n}$ で定義する. これについて次が成立する.

定理1. (h,n) についても 定理0と全く同じ局所化写像の存在定理が成立する.

X の (h,n)-局所化 $L_{(h,n)}X$ を $L^n_h X$, $L^n_E X$ 等で表わす. これは X の h-半局所化と云っても良いであろう. (n をどこに出すかが問題だが.)(注) ここで, さらにホモロジーの次元を一つの特定次元に限って同様なことが成立するかどうかと云う疑問が出るが, これについては次の反例がある.

(注) (特に断わらぬ限り $n=0$ に限っても一般性を失なわぬ.)

例1. $X=P^2$（実2次元射影空間），$\mathcal{F}=H_2(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$：$\widetilde{\mathcal{C}}\to \mathcal{A}b$ とするとき，X の $\mathcal{F}$－局所化は存在しない．スペクトラムの場合も，P^2 をその懸垂スペクトラムと見れば同様

非安定の場合の局所化・半局所化については次の結果がある．$L_h X$ を $L_h(X)$ などとも書くことにする．

定理2．（Bousfield, 岩瀬, Fo）i) X が H－空間，A_n－空間（$n\leq\infty$），ホモトピー n 回ループ空間（$n\leq\infty$）の構造を持つなら，その h－局所化 $L_h(X)$ も同様の構造を自然に持ち，しかも局所化写像 $f: X\to L_h(X)$ がその構造を保つ様に出来る．ii) h－local な空間の直積，レトラクト，ホモトピー逆極限も h－local となる

定理3．h－半局所化及び h－半局所的な空間について，上記定理2の i)，ii) と同様な結果が成立する

定理4．i) X が h－local なら ΩX もそうなる． ii) X が（h,n）－local なら ΩX は（$h,n-1$）－local iii) X が（h,n）－local なら（$h,n+1$）－local であり，さらに h－local でもある

上記定理4の iii) はXがスペクトラムの場合も成立する.
これよりXが空間又はスペクトラムの時、次の様な tower が自然に構成される.

$$X \to \cdots\cdots \to L_h^{n+1}X \xrightarrow{g_n} L_h^n X \xrightarrow{g_{n-1}} L_h^{n-1}X \to \cdots$$

§2. 以下安定の場合 即ち圏 $\mathcal{S}$ 又は $\widetilde{\mathcal{S}}$ で考える.

例2. $h_* = \pi_*$ のとき $L_h^n(X)$ は n 次元以上のホモトピーを消したスペクトラムであり, 上記 tower は Postnikov system に他ならぬ.

例3. h が周期的な場合 (例えば $h = K$), $L_h^n(X) \cong L_h(X)$ (in $\widetilde{\mathcal{S}}$) ($\mathcal{S}$ で書けば ホモトピー同値 $L_h^n(x) \simeq L_h(x)$)

例4. $h = \pi \oplus K$ のとき $\operatorname*{holim}_{n \to -\infty} L_h^n(X) \simeq L_K(X)$, $\operatorname*{holim}_{\infty \leftarrow n} L_h^n(X) \simeq X$

例5. h_* が connective なら $\operatorname*{holim}_{n \to -\infty} L_h^n(X) \simeq pt$, さらに X も connective なら $\operatorname*{holim}_{\infty \leftarrow n} L_h^n(X) \simeq L_h(X)$

以上の事柄の証明については準備中の論文を参照されたい．
Xが環スペクトラムなら，$L_h X$も自然にそうなるが，$L_h^n(X)$は必ずしもそうならないし，半局所化と smash 積の関係は良く分っておらず，これが計算の障害となっている．

文献

[1] A.K. Bousfield, The localization of spaces with respect to homology, Topology 14 (1975), 133–150

[2] —, The localization of spectra with respect to homology, ibid 18 (1979) 257–281