数理解析研究所講究録
第 840 巻 1993 年 70-81

有限グラフの Artin 型 L- 関数とその応用

早稲田大学理工学部
橋本喜一朗

1 Introduction

有限グラフ X の L- 関数とは, X 上の閉なるサイクルの数え上げに対する母関数の一つであるが, その定義と名称が示唆する様に, 整数論に於けるゼータ関数, L- 関数の類似である. そこで問題は, 数論に於いてこれらが果たす極めて重要な役割の類似を, 有限グラフの理論に於いて追求する事である.
この発想は砂田氏の "幾何学に於ける数論的方法" (cf.[15],[16]) に沿うものであるが, 我々の理論のより適切な表現は, 有限グラフ理論そのものと言うよりは, ある種の離散群 ($\approx \pi_1(X)$: グラフの基本群) のスペクトルに関する数論的考察というべきものであろう. 実際この研究は, 実リー群の離散群に関するセルバーグのゼータ関数の類似を, p- 進体上の群の離散群に対して与えた伊原 [8] にその起源がある.

本稿では, 筆者の仕事 [5],[6] の続編として, 有限グラフの分岐を許すガロア被覆 $X \to Y$ に対して, 数論に於ける Artin L- 関数の類似を定義し, その有限表示 (解析接続に相当) を与え, さらにこれを応用して, 素数定理の拡張である, (代数体の素イデアルの分布に関する) "チェボタレフの密度定理" の, 有限グラフの理論に於ける類似を示す.

この結果は International J. of Math. の最近号 (Vol 3-6) に掲載されたもので, 本稿はその要約である. なお, 同誌の同じ巻に掲載された, H.Bass [3] とは深い関連がある.

2 記号と定義.

以下本稿を通じて, 有限グラフ X は, 非有向なものを考える. 即ち, $X = (VX, \vec{E}X, \epsilon, \iota)$, であって,

$$VX = \text{頂点集合}, \quad \vec{E}X = \text{有向辺集合}, \quad |VX| < \infty, \quad |\vec{E}X| < \infty.$$

ϵ, ι は

$$\begin{array}{rlll} \epsilon = o \times t: & \vec{E}X \to VX \times VX & \epsilon(y) = (o(y), t(y)) \\ \iota: & \vec{E}X \to \vec{E}X, & \iota^2 = id., \end{array}$$

なる写像で,

$$\iota(y) = y^{-1} \neq y, \quad \epsilon(y^{-1}) = (t(y), o(y)) \quad \forall y \in \vec{E}X.$$

を満たすものとする.X の非有向辺とは, 対 $e = \{y, y^{-1}\}$, $y \in \vec{E}X$ のこととし, その全体を EX とかく. さらに X は連結とする. X のラベルとは各辺 $y \in \vec{E}X$ に不定元 $\mathbf{u}(y)$ を対応させる写像のこととする. 以下では非有向ラベルのみ考える: $\mathbf{u}(y) = \mathbf{u}(y^{-1})$ $\forall y \in \vec{E}X$. X 上の長さ ℓ の道 (path) とは列 $C = (y_{i_1}, y_{i_2}, .., y_{i_\ell}) s.t.\ t(y_{i_k}) = o(y_{i_{k+1}})$ for $1 \leq k \leq \ell - 1$ のことで, C の長さを $|C| = \ell$ で表す. C のラベル $\mathbf{u}$ に対する値を,

$$\mathbf{u}(C) := \mathbf{u}(y_{i_1}) ... \mathbf{u}(y_{i_\ell}). \tag{1}$$

と定める. また $o(C) = o(y_{i_1}), t(C) = t(y_{i_\ell})$ とおき, $o(C) = t(C)$ のとき C は閉路 (closed path) であるという. C は $y_{i_{k+1}} \neq y_{i_k}^{-1}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$ を満たすとき *proper* といい, $C, C^2 (:= C \cdot C)$ が共に proper のとき *reduced* という. Reduced な閉路の全体を $\mathcal{C}^{red}(X)$, と書き, 長さ ℓ の部分を $\mathcal{C}_\ell^{red}(X)$ と書く. $C = (y_{i_1}, .., y_{i_\ell})$ に対しその 始点を k 個ずらしたものを

$$C^{(k)} = (y_{i_{k+1}}, .., y_{i_\ell}, y_{i_1}, .., y_{i_k}) \in \mathcal{C}_\ell^{red}(X) \qquad (k \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}). \tag{2}$$

とする. これより, $\mathcal{C}_\ell^{red}(X)$ に同値関係が生じる. C の同値類を $[C]$ と書き, *cycle* という. $C, [C]$ は $C = {C_0}^k = C_0 \cdot ... \cdot C_0$ $(\exists k > 1, \exists C_0 \in \mathcal{C}^{red}(X))$ の形に書けないとき, 素 (*prime*) または原始的 (*primitive*) という. その様な C の全体を $\mathcal{C}^{pr}(X))$ で表す. そして次のようにおく.

$$\begin{aligned} \wp(X) &:= \{[C]; C \in \mathcal{C}^{pr}(X)\} \\ \wp_\ell(X) &:= \{[C]; C \in \mathcal{C}_\ell^{pr}(X)\}. \end{aligned}$$

さて以下では, 有限群 G が X に作用するものとする, 但し作用は inversion $(y \to y^{-1})$ を持たないものとし (cf.[13]), この作用による商グラフを Y とする: $\varphi : X \to Y := G\backslash X$. ラベル $\mathbf{u}$ は G- 不変と仮定する. $\wp := [C] \in \wp(X)$ を prime cycle とするとき, その分解群, 惰性群が

$$
\begin{aligned}
G_\wp &:= \{\sigma \in G; \sigma.[C] = [C]\} \\
I_\wp &:= \{\sigma \in G; \sigma.C = C\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

で定められる. このとき, $\sigma \in G_\wp$ は C 上に $C \mapsto C^{(k)}$ の如く作用する. ここで $k = k_\sigma$ は $0 \le k_\sigma < \ell_\wp$ なる整数. よって $\sigma \to k_\sigma$ なる対応から完全列

$$1 \to I_\wp \to G_\wp \to d_\wp \mathbf{Z}/\ell_\wp \mathbf{Z} \to 1, \tag{4}$$

が生ずる. $d_\wp$ は $\ell_\wp$ の約数であり, $\wp$ の次数という. また, $k_{\sigma_\wp} = d_\wp$ なる $\sigma_\wp \in G_\wp \pmod{I_\wp}$ を $\wp$ の フロベニウス 自己同型という. C の $G_\wp$ に対する基本領域を

$$F_\wp := G_\wp \backslash C = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_{d_\wp}}) \tag{5}$$

と定める. このとき, 単項式 $\mathbf{u}(F_\wp) := \prod_{j=1}^{d_\wp} \mathbf{u}(y_{i_j})$ の次数は $d_\wp$ に等しい.

以上の記号の下で, 我々の研究対象は 次数付き集合

$$
\begin{aligned}
\wp(X; d) &:= \{\wp \in \wp(X) \mid d_\wp = d\} \\
\wp_G(X) &:= G\backslash \wp(X) \quad (= \{\text{prime cycles の } G\text{- 同値類}\}) \\
\wp_G(X; d) &:= G\backslash \wp(X; d).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

の構造である.

3 (X, G) の Artin 型 L- 関数.

$\rho : G \to U(V_\rho)$ を有限次ユニタリ表現とする. この時, $(X, G; \rho)$ の Artin 型 L- 関数 $L(\mathbf{u}, \rho; X, G)$ が次の無限積

$$L(\mathbf{u}, \rho; X, G) \; := \prod_{\wp \in \wp_G(X)} \det(I_d - (\rho(\sigma_\wp) \mid V_\rho^{I_\wp})\mathbf{u}(F_\wp))^{-1} \tag{7}$$

で定義される．ここで $V_\rho^{I_\wp}$ は $I_\wp$-fixed vectors のなす V_ρ の部分空間．$\varphi : X \to Y := G\backslash X$ が不分岐の場合は，$G \cong \pi_1(Y)/\pi_1(X)$ であり，この L- 関数は，前の論文 [6] で扱ったものと一致する．さらに，$G = \{1\}$ なら $L(\mathbf{u}, \rho; X, G) = Z_X(\mathbf{u})$ は [5] に於ける X のゼータ関数である．

我々の最初の目標は，$L(\mathbf{u}, \rho; X, G)$ に対して有限なる表示式を与えることである．実際には，これは $\mathbf{u}$ の多変数有理式となり，その形は以下に見るように論文 [5] の,(2.22) 式と全く同一の表示を持つが示される．この為に，まず，$\vec{E}\tilde{X}$ の上の代数対応 (correspondence) を

$$T(y) := \sum_{y' \in \vec{E}X, \; (y,y'):proper} y' \, . \tag{8}$$

で定める．次に (ρ, V_ρ) に値を取る G-equivariant な $\vec{E}X$ 上の関数の空間を:

$$M_\rho^1(X; G) := \{ f : \vec{E}X \to V_\rho ; f(\gamma y) = \rho(\gamma) f(y), \text{ for } \forall \gamma \in G, \forall y \in \vec{E}X \}. \tag{9}$$

とする．この時, T は $M_\rho^1(X; G) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{A}$ ($\mathbf{A} := \mathbf{C}[\mathbf{u}]$): の $\mathbf{A}$- 上の自己準同型を引き起こす:

$$T_{\rho,\mathbf{u}} f(y) = \sum_{(y,y'):proper} f(y')\mathbf{u}_(y') \; . \tag{10}$$

以上の下で次の定理が示される:

Theorem 3.1 .

$$L(\mathbf{u}, \rho; X, G) = \det(I_d - T_{\rho,\mathbf{u}})^{-1}. \tag{11}$$

証明は [5] と同じ方針で示される. またこの表示に於いて, $T_{\rho,\mathbf{u}}$ を [5] に於けると同様に二つの代数対応の積に分解する表示も得られ, それから次の結果が得られる: $\{z_j; 1 \le j \le 2m\}$ を $G\backslash\vec{E}X \cong \vec{E}Y$ の代表系とし, $u_j = \mathbf{u}(z_j)$ $(1 \le j \le 2m)$ とおく. 頂点 $P \in VX$ の valency を q_P, G 内の固定群を G_P とする. また, 辺 z_j の固定群を I_j とする.

Proposition 3.2 .

$$\det T_\rho = (-1)^{b_0(X,G)-b_1(X,G)} \prod_{P\in(G\backslash VX)} q_P^{\dim V_\rho^{G_P}} \prod_{z_j\in(G\backslash \vec{E}X)} u_j^{\dim V_\rho^{I_j}}, \tag{12}$$

但し

$$b_1(X,G) := \sum_{z\in(G\backslash EX)} \dim V_\rho^{G_z} \quad (= \frac{1}{2}\dim M_\rho(X)),$$

$$b_0(X,G) := \sum_{P\in(G\backslash VX)} \dim V_\rho^{G_P}.$$

$L(\mathbf{u},\rho;X,G)$ は次の性質を持つ:

- X から valency 1 の辺の G-orbit を除去しても $L(\mathbf{u},\rho;X,G)$ は不変.
- X から辺 z_j の G-orbit を除去する事は, $L(\mathbf{u},\rho;X,G)$ に於いて $\mathbf{u}(z_j) = 0$ とおく事に相当する:

$$L(\mathbf{u},\rho;X,G)\,|_{\mathbf{u}(z_j)=0} = L(\mathbf{u},\rho;X\backslash Gz_j,G)$$

- X の辺 z_j の G-orbit をその頂点に縮める (contract) 事は, $L(\mathbf{u},\rho;X,G)$ に於いて $\mathbf{u}(z_j) = 1$ とおく事に相当する:

$$L(\mathbf{u},\rho;X,G)\,|_{\mathbf{u}(z_j)=1} = L(\mathbf{u},\rho;X/G.z_j,G).$$

4 Perron-Frobenius 定理の応用.

この節では $u_j = \mathbf{u}(z_j)$ は $u_j \neq 0 \quad (1 \leq j \leq 2m)$ なる複素数とし, $|\,\mathbf{u}\,|$ (resp. $\arg(\mathbf{u})$) を

$$\begin{aligned} |\,\mathbf{u}\,|(z_j) &= |\,u_j\,|, \\ \arg(\mathbf{u})(z_j) &= \arg(u_j). \end{aligned} \tag{13}$$

とおく. このとき, $T_{1,|\mathbf{u}|}$ は定義から非負行列となるが, の連結性から既約な非負行列である事がわかる. そのフロベニウス固有値を $\lambda = \lambda_{|\mathbf{u}|}$ と書く. λ は良く知られた次の性質をもつ:(c.f.[12]):

- $\lambda_{|\mathbf{u}|} = \max\{\mu \in \mathbf{R};\ T_{1,|\mathbf{u}|}\,\mathbf{x} \geq \mu\mathbf{x} \ \ (\exists \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \neq 0)\} \ > \ 0.$
- $\lambda_{|\mathbf{u}|}$ は $T_{1,|\mathbf{u}|}$ の絶対値が最大の固有値であり, $T_{1,|\mathbf{u}|}$ が既約ならその重複度は 1 である.
- $\mathbf{x}$ を $\lambda_{|\mathbf{u}|}$ に対する固有ベクトルとして各成分が正のものを取れる.
- $T_{1,|\mathbf{u}|} \geq B \geq 0$, かつ β が B の固有値なら $\lambda_{|\mathbf{u}|} \geq |\,\beta\,|$.
- $T_{1,|\mathbf{u}|}$ が原始的なら上で等式 $\lambda_{|\mathbf{u}|} = |\,\beta\,|$; が成り立てば $T_{1,|\mathbf{u}|} = B$, $\lambda_{|\mathbf{u}|} = \beta$ となる.

ここで $T_{1,|\mathbf{u}|}$ が原始的とは, ある正整数 n に対して $T^n_{1,|\mathbf{u}|} > 0$ となる事を言う. この性質は, (X, G) に付いての

$$\begin{aligned} g_G(X) \ &:= \ \gcd\{d \in \mathbf{N}; \wp(X; d) \neq \emptyset\} \\ &= 1 \quad : X \text{ は } G\text{-primitive}) \end{aligned}$$

と同値である.

Lemma 4.1 *$\rho \in \hat{G}$ (i.e., ρ は G の既約表現) とし, μ を $T_{\rho,\mathbf{u}}$ の任意の固有値とすると次が成り立つ.*
(i) $\lambda_{|\mathbf{u}|} \geq |\,\mu\,|$.
(ii) $\lambda_{|\mathbf{u}|} = |\,\mu\,|$, ならば ρ は *1* 次表現で任意の $\wp \in \wp(X)$ に対し

$$\arg(\rho(\sigma_\wp)) \ = \ d_\wp \arg(\mu) - \arg(\mathbf{u}(F_\wp)). \tag{14}$$

Corollary 4.2 $T_{\mathbf{1},|\mathbf{u}|}$ が原始的である為の必要十分条件は (X,G) に付いて

$$\begin{aligned} g_G(X) &:= \gcd\{d \in \mathbf{N}; \wp(X;d) \neq \emptyset\} \\ &= 1 \quad (\text{:}X \text{ は } G\text{-}primitive \text{ であるという}). \end{aligned}$$

G- 不変ラベル $\mathbf{u}$ に対して, 単項式 $\{u_j = \mathbf{u}(z_j); z_j \in \vec{E}X\}$ で生成される自由アーベル群を $W(X) = W(\mathbf{u};X)$ とし, その部分群

$$\begin{aligned} WC(X) &:= <\mathbf{u}(\wp); \wp \in \wp(X)> \\ WC_G(X) &:= <\mathbf{u}(F_\wp); \wp \in \wp(X)> \end{aligned} \tag{15}$$

を考える. $[W(X):WC(X)] < \infty$ のとき X は分離的 (separable), $WC(X) = W(X)$ (resp. $WC_G(X) = W(X)$) のとき, X は強分離的 (strongly separable) (resp. 強 G- 分離的 (strongly G-separable)) という.

Theorem 4.3 $\rho \in \hat{G}$ で $T_{\rho,\mathbf{u}}$ が $\lambda_{|\mathbf{u}|} = |\mu|$ なる 固有値 μ を持つとするとき, ρ は *1* 次表現で 次が成り立つ:

(i) 任意の変数 $\mathbf{v}$ に対し,

$$L(\mathbf{v},\rho;X,G) \quad = \quad L(\mathbf{v}\exp(\sqrt{-1}(\arg\ \mu - \arg\ \mathbf{u})), \mathbf{1}; X, G). \tag{16}$$

(ii) $\rho = \mathbf{1}$ で X が強 G- 分離的なら

$$\arg\ u_j = \arg\ \mu \quad (1 \leq j \leq 2m). \tag{17}$$

(iii) X が強分離的なら $\rho = \mathbf{1}$ であって $\arg\ u_j = \arg\ \mu \quad (1 \leq j \leq 2m)$.

5 密度定理 (1): simple case.

以下では X は circle $\mathbf{S}^1$ と homotopic でないと仮定し, 自明なラベル $\mathbf{u} = \mathbf{1}$ を考える. $T_\rho := T_{\rho,1}$. 特に, λ を $T_1 = T_{1,1}$ のフロベニウス固有値とすると, Proposition 3.2 と X の仮定から $\lambda > 1$ が出る. この事実は本稿の結果の key となる性質である. 自然数 $k \in \mathbf{N}$ と $S \subset G$ にたいして

$$C_{\wp^k}(S) \quad := \quad \frac{1}{\#(I_\wp)} \#(\{\gamma \in I_\wp \mid \sigma_\wp^k \gamma \in S\}) \qquad (\wp \in \wp_G(X)). \tag{18}$$

とおく.

Theorem 5.1 . *(i)* $g_G(X) \mid \ell$ でなければ $\wp_G(X;\ell) = \emptyset$ であって

$$\#(\wp_G(X; g_G(X)\ell)) \quad \sim \quad \frac{\lambda^{g_G(X)\ell}}{\ell} \qquad (\ell \uparrow \infty). \tag{19}$$

(ii) G の任意の共役類 $[\tau]$ に対し

$$\sum_{\wp \in \wp_G(X; g_G(X)\ell)} C_\wp([\tau]) \quad \sim \quad \frac{\#([\tau])}{\#(G)} \frac{\lambda^{g_G(X)\ell}}{\ell} \qquad (\ell \uparrow \infty). \tag{20}$$

が成立する.

Theorem 5.2 . 上と同じ仮定の下で

$$\pi(X, G; \ell, [\tau]) \quad \sim \quad \frac{\#([\tau])}{\#(G)} \frac{1}{\lambda^{g_G(X)} - 1} \frac{\lambda^{g_G(X)\ell}}{\ell} \qquad (\ell \uparrow \infty), \tag{21}$$

さらに $\varphi : X \to Y := G\backslash X$ が有限分岐, 即ち有限個の $\wp$ を除き $I_\wp = 1$ とすると, 次が成り立つ:

$$\pi(X, G; \ell) \quad \sim \quad \frac{1}{\lambda^{g_G(X)} - 1} \frac{\lambda^{g_G(X)\ell}}{\ell} \qquad (\ell \uparrow \infty). \tag{22}$$

6 密度定理 (2): generic case.

次に ラベル $\mathbf{u}$ が十分に generic な場合を考察する. この場合, 密度定理は, [10][11],[1] と同様な方法で, 解析数論における Wiener- 池原の Tauber 型定理の応用として導かれる.

$\kappa : \vec{E}X \to \mathbf{R}_+$ を $\vec{E}X$ 上の G- 不変関数とし, $\kappa_j := \kappa(z_j)$ $(1 \leq j \leq 2m)$ とおく. また複素変数 s に対して

$$\begin{aligned} u_j &= \mathbf{u}(z_j) = \exp(-\kappa_j s) \\ N_\kappa(\wp) &= \mathbf{u}(F_\wp) \mid_{s=-1} \;=\; \exp(\kappa_{j_1} + \ldots + \kappa_{j_{d_\wp}}). \end{aligned} \tag{23}$$

とおく. この時, s の L- 関数

$$L(s,\rho;X,G,\kappa) := \prod_{\wp \in \wp_G(X)} \det(I_d - (\rho(\sigma_\wp) \mid V_\rho^{I_\wp}) N_\kappa(\wp)^{-s})^{-1}. \tag{24}$$

を定めると, 前節の結果から $Re(s) >> 0$ のとき絶対収束する事がわかる. ここで

$$T_{\rho,\kappa}(s) := T_{\rho,\mathbf{u}} \mid_{u_j = \exp(-\kappa_j s)}, \tag{25}$$

とおくと Theorem 3.1 から直ちに次の等式が得られる.

$$L(s,\rho;X,G,\kappa) := \det(I - T_{\rho,\kappa}(s))^{-1} \tag{26}$$

この右辺によって, $L(s,\rho;X,G,\kappa)$ は全平面に解析接続される. さらにこの関数は零点を持たないこともわかる. 極は, $T_{\rho,\kappa}(s_0)$ が 1 を固有値に持つ様な $s = s_0$ に於いて有する. 実数 $s \in \mathbf{R}$ に対して, $T_{\rho,\kappa}(s)$ のフロベニウス固有値 $\lambda_\kappa(s)$ は s の減少関数で,

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_\kappa(s) = 0$$

となる. さらに $\lambda_\kappa(0) = \lambda > 1$ (*c.f.*§6). これより $\lambda_\kappa(h_\kappa) = 1$ となる $h_\kappa > 0$ が一意的に定まる.

Theorem 6.1 以上の記号の下で
(i) $L(s,\rho;X,G,\kappa)$ は $Re(s) > h_\kappa$ で絶対収束しこの領域で正則.
(ii) $L(s,\mathbf{1};X,G,\kappa)$ は $s = h_\kappa$ で一位の極を持つ.
(iii) $L(s,\rho;X,G,\kappa)$ が $s = h_\kappa + \sqrt{-1}t$ で極を持つ $\Longleftrightarrow$ $\deg(\rho) = 1$ かつ $\forall\, \wp \in \wp(X)$ に対して

$$\arg(\rho(\sigma_\wp)) = \kappa(F_\wp)t \quad (:= (\kappa_{j_1} + \ldots + \kappa_{j_{d_\wp}})t). \tag{27}$$

この時 $L(s,\rho;X,G,\kappa) = L(s-\sqrt{-1}t,\mathbf{1};X,G,\kappa)$ $(\forall s \in \mathbf{C})$, が成立し, 直線 $Re(s) = h_\kappa$ 上の極はすべて *simple* である.

□

上式 (27) が, ある $t \neq 0$ で満たされたとすると, G は有限群だから

$$(\kappa_{j_1} + \ldots + \kappa_{j_{d_\wp}})t \in \mathbf{Q}\pi \quad (\forall \wp \in \wp(X)).$$

ここでさらに, X が分離的と仮定する. すると

$$\kappa_i/\kappa_j \in \mathbf{Q} \quad (\forall i,j).$$

よって κ が 次の弱い条件

$$(*):\quad \text{ある } i,j \text{ に対して} \quad \kappa_i/\kappa_j \notin \mathbf{Q}$$

を満たせば, データ $(\wp_G(X), N_\kappa(\wp), G)$ は砂田 [15], [16] の意味で "nice" であり, Tauber 型定理を適用できる. まず

$$\begin{aligned}
\pi_\kappa(X,G;x,[\tau]) &:= \sum_{\wp\in\wp_G(X),\ \kappa(\wp)<x} C_\wp([\tau]),\\
\pi_\kappa(X,G;x) &:= \#(\{\wp \in \wp_G(X);\ \kappa(\wp) < x\}) \quad (\kappa(\wp) = \kappa(F_\wp))
\end{aligned} \tag{28}$$

とおく. このとき

Theorem 6.2 X が分離的で κ が条件 $(*)$ を満たすとき, G の任意の共役類 $[\tau]$ に対し, 次が成立する:

$$\pi_\kappa(X,G;x,[\tau]) \sim \frac{\#([\tau])}{\#(G)}\frac{\exp(h_\kappa x)}{h_\kappa x} \qquad (x \uparrow \infty), \tag{29}$$

さらに (X,G) が有限分岐型であれば

$$\pi_\kappa(X,G;x) \sim \frac{\exp(h_\kappa x)}{h_\kappa x} \quad (x \uparrow \infty), \tag{30}$$

□

Remark. κ が条件 $(*)$ を満たさないとき，$\kappa_i/\kappa_j \in \mathbf{Q}$ $(\forall i,j)$ であるが，この場合も密度定理は以下のようにして simple case に帰着される．正数 t と正整数 m_j $(1 \leq j \leq 2m)$ を

$$\kappa_j = m_j t \ (\forall j), \quad \gcd\{m_j\} = 1$$

なる如く選び，各辺の G-orbit Gz_j を m_j 個に分割すると，X の細分グラフ $X^{(\kappa)}$ が得られる．これに Theorem 5.1, 5.2 を適用すればよい．

References

[1] T.Adachi,T.Sunada: Twisted Perron-Frobenius theorem and L-functions, J.Funct. Anal. 71 (1987), 1-46.

[2] N.Biggs: Algebraic Graph Theory, Cambridge Tracts in Math., 67,(1974)

[3] H.Bass: The Ihara-Selberg Zeta Function of a Tree Lattice, Columbia Univ. International J. of Math. Vol 1-4 (1990)

[4] K.Hashimoto: On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms, J. Fac.Sci., Univ. of Tokyo, Sect.IA, Math. 27 (1980), 227-245.

[5] K.Hashimoto : Zeta functions of finite Graphs and Representations of p-adic Groups, Advanced Study in Pure Math. 15 (1989), 211-280.

[6] K.Hashimoto: On Zeta and L-functions of finite Graphs, International J. of Math. Vol 1-4 (1990), 381-396.

[7] K.Hashimoto, A.Hori: Selberg-Ihara's Zeta function for p-adic Discrete Groups, Advanced Study in Pure Math. 15 (1989), 171-210.

[8] Y.Ihara: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J.Math.Soc. Japan 18 (1966), 219-235.

[9] Y.Ihara: On congruence monodromie problems, vol.1,2, Lecture notes, Univ. of Tokyo (1968,69).

[10] W.Parry,M.Pollicott: An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows, Ann.of Math. 118 (1983), 573-591.

[11] W.Parry,M.Pollicott: The Chebotarev theorem for Galois coverings of Axiom A flows, Ergod. Th. and Dynam.Sys. 6 (1986), 133-148.

[12] E.Seneta: Non-negative Matrices and Markov Chains, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag (1973).

[13] J-P.Serre: Arbres,Amalgames, SL_2, Astérisque, no 46, Soc.Math. France (1977).

[14] J-P.Serre: Represéntation Linéaires des Groupes Finis, Hermann, Paris (1971)

[15] T.Sunada: L-functions in Geometry and Applications, Lecture Notes in Math. Springer 1201, 266-284 (1986)

[16] T.Sunada: Fundamental groups and the Laplacian (in Japanese), Kinokuniya (1988)