数理解析研究所講究録
第 849 巻 1993 年 40-48

Subfactors and topological invariants

河東泰之 (東大・数理科学)

(河野美文 (佐賀大・理)
佐野隆志 (九大・理)) 記

Jonesにより、作用素環論の指数理論に基いて与えられたknotsに対する不変量(Jones多項式)の、3次元topological version、つまり、3次元closed manifoldsに対する不変量が、多くの人々によって導入された。ここでは、($\mathbb{C}$値)Turaev-Viro型不変量を与える"quantum 6j-symbol"と、指数理論で、subfactorsの分類に現れる代数的(complete)不変量"paragroup"('87, Ocneanu)との同等性('91, Ocneanuにより主張)の一部について触れる。(Evans-Kawahigashi(後述)参照。)
なお、3次元compact多様体が、境界を持つ場合は、Atiyahの意味での(2+1)-dimensional topological quantum field theoryを与える。

指数理論は、$N \subseteq M$(無限次元単純作用素環)の組を対象とする。群論での指数$[G:H]$ ($G \supseteq H$)の対応物が、Jones index $[M:N]$であり、また体論でのガロア理論を期待し、何らかの"量子化"されたガロア群 = paragroupと見る。

1) まず、factor (hyperfinite II_1-factor ＝ 有限次元環の増大列の閉包) と subfactor の組の例を与える。

① $M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots$ (無限テンソル積. 埋め込みは $M_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} a & & b & \\ & a & & b \\ c & & d & \\ & c & & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ 等)

の、(自然なトレースによる GNS 表現での) 閉包は、hyperfinite II_1-factor を与える。

$M := (M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots)$ の閉包

$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$

$N := (\mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots)$ の閉包

の組は、本質的に $M_2(\mathbb{C}) \geqq \mathbb{C}$ なる包含関係だから、

$[M:N] = 4$ (行列環 $M_2(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ にする時も同様に hyperfinite II_1-factor を与え、$[M:N] = n^2$ となる。)

② 群・部分群 $G \geqq H$ の、群環 $\mathbb{C}[G] \geqq \mathbb{C}[H]$ の、ある種の閉包 "$M \geqq N$" の index $[M:N] = [G:H] \in \mathbb{N}$ となる。

③ Jones relation (Temperly-Lieb)

$$\begin{cases} e_i^* = e_i = e_i^2 & (* \text{ は involution}) \\ e_i e_j = e_j e_i & (|i-j| > 1) \\ e_i e_{i\pm 1} e_i = \tau e_i \end{cases}$$

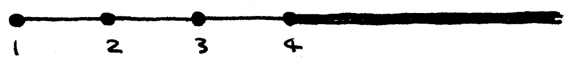
が与えられた時、

$M := \langle e_1, e_2, e_3, \cdots \rangle$ の閉包

$\rotatebox{90}{$\subseteq$}$

$N := \langle e_2, e_3, \cdots \rangle$ の閉包

に対して Jones index は $[M:N] = \tau^{-1}$ である。
(A ($\doteqdot \langle e_1, e_2, e_3, \cdots \rangle$ で (代数的に) 生成された algebra)
は, A上 左掛算 で 作用する。 空間A上には, トレースから決まる
Hilbert space の 構造が入る。 また トレースの positivity から,
$\tau < \frac{1}{4}$ or $= \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n}}$ 。) $M \supseteq N$ は hyperfinite
II_1-factor になっている。(有限次元近似環として, $\langle e_1, \cdots, e_m \rangle$。)



(指数値の分布)

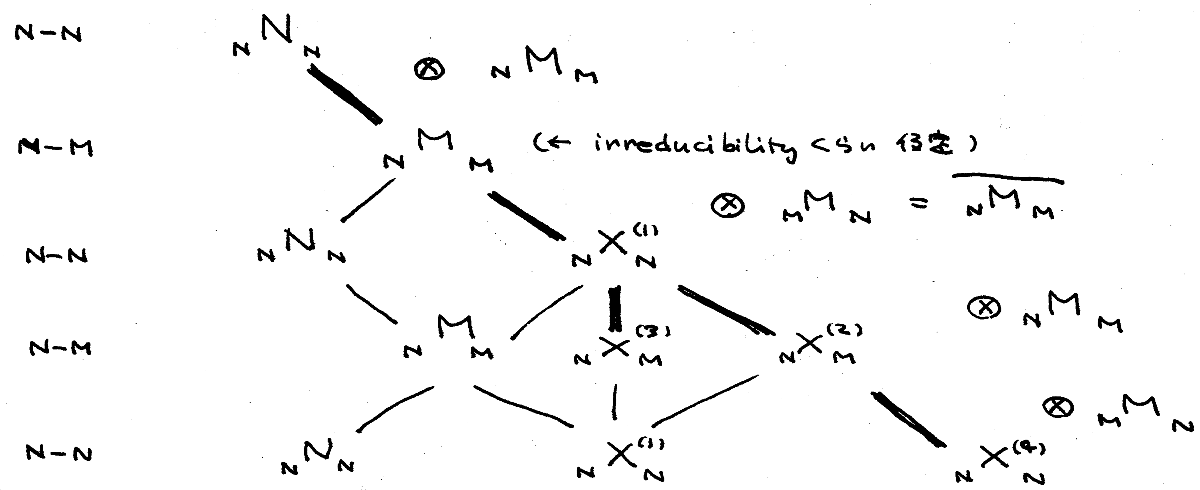
Jones subfactor は, canonical construction (paragroup) で 構成され, WZW $SU(2)_k$ model, 可解格子模型 (Andrews-Baxter-Forrester) や, quantum 6j-symbol for $U_q(sl(2))$ (Kirillov-Reshetikhin) との対応がある。

Dynkin	A_n型	D_n型
○ 格子模型	ABF	$\forall n$. O.K.
○ 作用素環 (quantum 6j-symbol paragroup)	Jones	n even O.K. n odd. impossible
○ RCFT (Moore-Seiberg の公理の意味での)	WZW $SU(2)$	any n impossible

しかし, 上記のように, 常に対応するとは限らない。

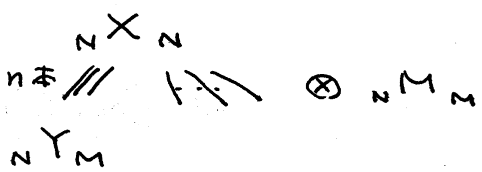
2) 次に paragroupについて述べる (bimodule approach)

$N \subseteq M$ を hyperfinite II_1-factors ($[M:N] < +\infty$) とする。Mを、左N 右M-module とみる。(表現論での アナロジー：コンパクト群の unitary 表現から、(作用素環の) 2つの作用をもつ bimodules を考える (Connes)。)



上図は、テンソル積に関する既約加群への分解である。

例えば、



は、

$$_NX_N \otimes {}_NM_M = n \cdot {}_NY_M \oplus \cdots$$ を意味する。

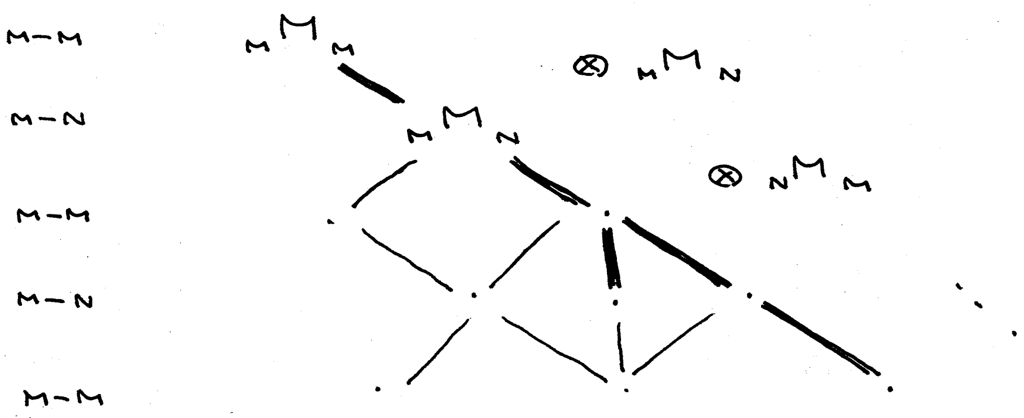
(事実として、$_NX_N \otimes {}_NM_M \otimes {}_MM_N = {}_NX_N \oplus \cdots$

詳しくは、$_NX_N \otimes {}_NM_M = {}_NY_M \oplus \cdots$ の時、

$_NY_M \otimes {}_MM_N = {}_NX_N \oplus \cdots$ が成立 (Frobenius-reciprocity)。

前図での 太線 ━ 部分が、M ⊇ N の principal graph と呼ばれる。(Jones) principal graph が finite graph (つまり、bimodules が有限系) の時、finite depth、infinite graph の時、infinite depth と言う。(後者が "generic")(finite depth の時、paragroup は、complete invariant)

また同様に、次のグラフ (dual principal graph) も考えられる。



(ここの例では、両方 E_6)。なお、principal graph が finite depth であることは、dual principal graph のそれと、同値である。

さて、graphs が finite depth の時、4種類 N−N, N−M, M−N, M−M bimodules の、有限系が得られる。ここに fusion algebra が現れる。(${}_N X_M \otimes {}_N Y_M = 0$ 等、適宜解釈する。) involution は、contragradient module で (例: ${}_N X_M \longrightarrow {}_M \overline{X}_N$) 定義され、一般には、非可換な

algebra となる。（例：非可換群から作られる組）

【graphs の例】

(Jones index)$^{\frac{1}{2}}$ = Perron-Frobenius eigenvalue of principal graph なので、index < 4 の時、P.F. eigenvalue < 2。この時、グラフ論から principal graph としては、A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 が考えられる。（実際は、A_n (Jones subfactor), D_{2n}, E_6, E_8 が現れる。）

paragroup は、上で考えた fusion algebra (of bimodules) と、次の 6j-symbol の組と考えられる。6つの bimodules A, B, C, D, X, Y に対し、Intertwiners（各々、正規直交化した basis から選ぶ）の

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes A \otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \otimes B \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & C \otimes Y \arrow[dl] \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

(6j-symbol)

composition ($\circlearrowleft$) から定まるスカラー ($\in \mathbb{C}$) を対応づける。

3) ここでは、quantum 6j-symbol が満たす3公理と、Turaev-Viro の不変量性を保証する3公理の対応について述べるが、2つは明らかに同等で、残り1つに関してが微妙である。

Turaev-Viro は、3-manifold（境界なし）に対する triangulation (tetrahedras への分解) に対し、quantum

6j-symbol を用いて，不変量を定義した。ここでは，tetrahedra の辺に，bimodule，面に intertwiner の，admissible な配置を考え，対応する 6j-symbol を，前のように定義する。

この時，

$$(\text{weight})^{(\#\,\text{vertices})} \times \sum_{\substack{\text{admissible}\\ \text{assignment}}} \prod \left(\begin{matrix}\text{weight}\\ \text{for bimodule}\end{matrix}\right) \prod (6j\text{-symbol})$$

が，Turaev-Viro 型 topological invariant になる条件を考える。要請は，

- well-defindness ($\Leftrightarrow$ tetrahedral symmetry)
- 3-local moves による不変性 (Turaev-Viro)
  (move I，II，III)
  ($\underset{\text{同値}}{\Leftrightarrow}$ Alexander moves による不変性)

である。

① <u>unitarity</u> of

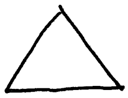
$$\begin{tikzcd} & X \otimes A \otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \otimes B \arrow[dr] & & C \otimes Y \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd}$$

(intertwiners のなす正規直交基に関するユニタリー条件)

$\underset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$

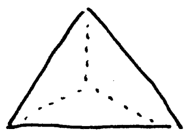
<u>invariance</u> under

move I：



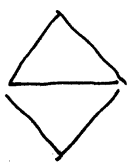
triangle

$\longleftrightarrow$



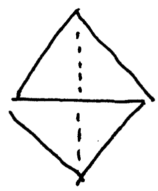
2 tetrahedra

move II：



2-triangles

$\longleftrightarrow$



2 tetrahedra

② renormalization $\overset{}{\underset{対応}{\Longleftrightarrow}}$ tetrahedral symmetry

$\Updownarrow$

(

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X\otimes A\otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X\otimes B \arrow[dr] & & C\otimes Y \arrow[dl] \\ & D & \end{tikzcd} \quad と \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \overline{X}\otimes C\otimes Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A\otimes Y \arrow[dr] & & \overline{X}\otimes D \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(約90°回転)

の2つの 6j-symbols 間の関係 (Frobenius-reciprocity))

(注) connection での 対応する条件

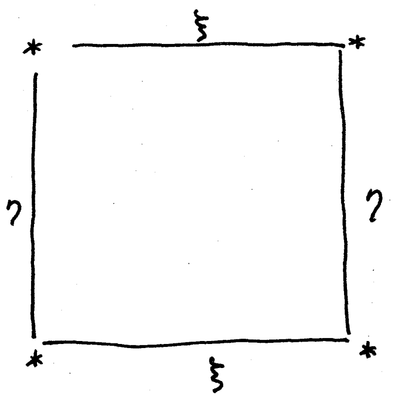
(crossing symmetry , commuting square condition) は、
(lattice model)

$$\begin{matrix} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \longrightarrow & d \end{matrix} = \overline{\begin{matrix} b & \longrightarrow & d \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & c \end{matrix}} \sqrt{\frac{\mu(b)\,\mu(c)}{\mu(a)\,\mu(d)}}$$

┘

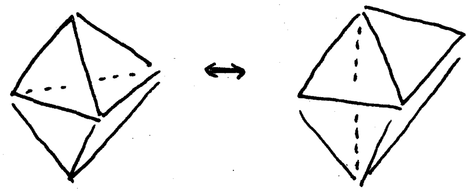
③ flatness $\underset{対応}{\Longleftrightarrow}$ Pentagon

$\Updownarrow$ def. Move III での不変性



$= 1$

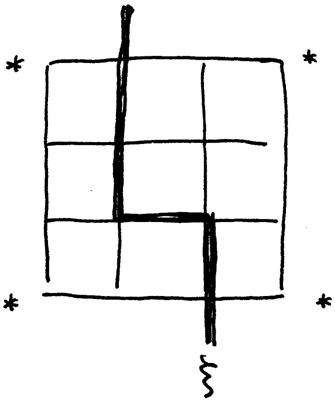
$* = {}_N N_N$ or ${}_M M_M$



2 tetrahedras ↔ 3 tetrahedras

これについて、(flatness $\underset{自明か}{\Rightarrow}$) 3×3 flatness $\Longleftrightarrow$ pentagon

を考える。

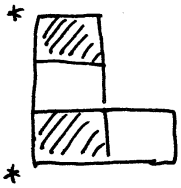
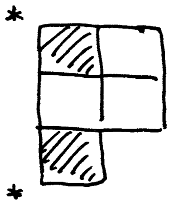
$1 =$  $\Longleftrightarrow \quad \sum a_\xi \bar{b}_\xi = 1$

これと、unitarity

$\sum |a_\xi|^2 = \sum |b_\xi|^2 = 1$

より、$a_\xi = b_\xi$ (Cauchy - Schwartz inequality)。

つまり、絵でかけば、

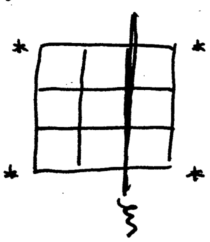
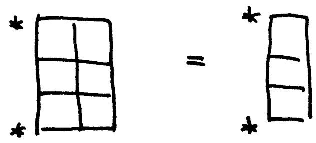
 = 

斜線部 "  = 1 (essentially) " に注意すれば、

左辺 ($\leftrightarrow$ 2 tetrahedras) = 右辺 ($\leftrightarrow$ 3 tetrahedras)

つまり、Move III 不変性と同値である。

(3×3 - flatness → flatness は、

 に関して、前と同様にして  が示され、これより帰納的に 3×n flatness が従う。)

topological invariant から、subfactor を得る逆手法等を含め、詳しくは、下記論文を参照して下さい。

D.E. Evans & Y. Kawahigashi,
From subfactors to 3-dimensional topological quantum field theories and back, preprint.