数理解析研究所講究録
第 849 巻 1993 年 61-68

対称Hadamard型spin model

九大・理 山田美枝子(Mieko Yamada)

1 Jones[8]は1989年にlinkの不変量を求めるためにspin modelの概念を導入した。その後 綿谷-宗政[9]により、対称性をとり除いたspin modelの一般化が行われた。最近、坂内-坂内[2]は綿谷-宗政により一般化されたspin modelをさらに一般化した。

<u>定義</u>[2] Xを有限集合で$|X|=n=D^2$とする。$X\times X$から$\mathbb{C}$への関数$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$が次の条件をみたすとき$(X,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$はloop variable Dをもつgeneralized generalized spin modelという。

(1) $\omega_1(\alpha,\beta)\omega_3(\beta,\alpha)=1,\quad \omega_2(\alpha,\beta)\omega_4(\beta,\alpha)=1 \quad \forall\alpha,\beta\in X$

(2) $\sum_{x\in X}\omega_1(\alpha,x)\omega_3(x,\beta)=n\delta_{\alpha,\beta},\quad \sum_{x\in X}\omega_2(\alpha,x)\omega_4(x,\beta)=n\delta_{\alpha,\beta} \quad \forall\alpha,\beta\in X$

(3a) $\sum_{x\in X}\omega_1(\alpha,x)\omega_1(x,\beta)\omega_4(\gamma,x)=D\omega_1(\alpha,\beta)\omega_4(\gamma,\alpha)\omega_4(\gamma,\beta)$

(3b) $\sum_{x\in X}\omega_1(x,\alpha)\omega_1(\beta,x)\omega_4(x,\gamma)=D\omega_1(\beta,\alpha)\omega_4(\alpha,\gamma)\omega_4(\beta,\gamma)$

$\forall\alpha,\beta,\gamma\in X$

こうして定義された generalized generalized spin model から向きづき link の diagram の partition function が定義され link の不変量が与えられる。

2 行列 W_i $(i=1,2,3,4)$ を $W_i=(\omega_i(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in X}$ で定義する。$W_1, W_2 \in \{W_\varepsilon, W_\varepsilon^t\}$, $W_3, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, W_{\varepsilon'}^t\}$ である generalized generalized spin model を Jones型 generalized spin model, $W_1, W_4 \in \{W_\varepsilon, W_\varepsilon^t\}$, $W_2, W_3 \in \{W_{\varepsilon'}, W_{\varepsilon'}^t\}$ であるものを pseudo-Jones型 generalized spin model, $W_1, W_3 \in \{W_\varepsilon, W_\varepsilon^t\}$, $W_2, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, W_{\varepsilon'}^t\}$ であるものを Hadamard型 generalized spin model と呼ぶ。ただし $\{\varepsilon, \varepsilon'\}=\{+,-\}$, W^t は W の転置行列。

野村[10]は、任意の n 次 Hadamard行列から loop variable $4\sqrt{n}$ をもつ Jones型 spin model が構成できることを示した。

ここでは Hadamard型の中で、特に対称 Hadamard型と呼ばれるものをとり扱う。

<u>定義</u>[2] (X, ω_+, ω_-) が次の条件をみたすとき、対称Hadamard型 spin model とよぶ。

(0) $\omega_+(\alpha,\beta)=\omega_+(\beta,\alpha)$, $\omega_-(\alpha,\beta)=\omega_-(\beta,\alpha)$

(1H) $W_+\circ W_+=J$, $W_-\circ W_-=J$, $\circ$ は Hadamard積、J は成分がすべて 1 の正方行列.

(2H) $W_+^2=nI$, $W_-^2=nI$, I は単位行列.

(3a) $\sum_{x\in X}\omega_{\varepsilon'}(\alpha,x)\omega_{\varepsilon'}(x,\beta)\omega_\varepsilon(x,\gamma)=D\omega_{\varepsilon'}(\alpha,\beta)\omega_\varepsilon(\alpha,\gamma)\omega_\varepsilon(\beta,\gamma)$

$W_+ = W_-$ であれば Jones 型でも pseudo-Jones 型でもある.

3 定理1　$H=(h_{ij})$ を n 次 Hadamard 行列とする. 行列 $M=(m_{xy})$ $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ を次で定義する.

$$m_{xy} = h_{x_1x_2} h_{y_1y_2} h_{x_1y_2} h_{y_1x_2}$$

このとき, M は n^2 次正則対称 Hadamard 行列である.

(証明)　$z=(z_1, z_2)$ とおく.

$$\sum_z m_{xz} m_{yz} = \sum_{z_1 z_2} h_{x_1x_2} h_{z_1z_2} h_{x_1z_2} h_{z_1x_2} h_{y_1y_2} h_{z_1z_2} h_{y_1z_2} h_{z_1y_2}$$

$$= h_{x_1x_2} h_{y_1y_2} \sum_{z_1} h_{z_1x_2} h_{z_1y_2} \sum_{z_2} h_{x_1z_2} h_{y_1z_2}$$

$$\sum_{z_2} h_{x_1z_2} h_{y_1z_2} = \begin{cases} n & x_1 = y_1 \text{ のとき} \\ 0 & x_1 \neq y_1 \text{ のとき} \end{cases}, \quad \sum_{z_1} h_{z_1x_2} h_{z_1y_2} = \begin{cases} n & x_2 = y_2 \text{ のとき} \\ 0 & x_2 \neq y_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

から

$$\sum_z m_{xz} m_{yz} = \begin{cases} n^2 & (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ のとき} \\ 0 & (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \text{ のとき} \end{cases}$$

となり, M は Hadamard 行列である. 対称であることは定義より明らか.

$$\sum_y m_{xy} = \sum_{y_1, y_2} h_{x_1x_2} h_{y_1y_2} h_{x_1y_2} h_{y_1x_2}$$

$$= h_{x_1x_2} \sum_{y_1} h_{y_1x_2} \sum_{y_2} h_{y_1y_2} h_{x_1y_2}$$

$$= h_{x_1x_2} \cdot h_{x_1x_2} \cdot n$$

$$= n$$

で正則である.

n 次 Hadamard 行列から n^2 次正則対称 Hadamard 行列が構成さ

れることは、すでにGoethals-Seidel[5]により証明されているが、定理1の構成法とは異なる。Ivanov-Chuvaeva[6]によって、任意のHadamard行列からクラス4のsymmetric amorphous association schemeが得られることが示されたが、定理1の構成法から得られるHadamard行列は、このamorphous association schemeでrelation R_1, R_2, R_3を合併したクラス2のassociation scheme (strongly regular graph)に対応する。

4 $4n$次Hadamard行列$H=(h_{ij})$の成分1を0, −1を1に変えて$GF(2)$の元としてみたものを2進Hadamard行列$B=(b_{ij})$という。(1, −1) Hadamard行列の直交性は、2進Hadamard行列では2つの行(列)ベクトルのHamming距離が$2n$であることに対応する。

$\Omega=\{1,2,\cdots,4n\}$の4点部分集合$I=(i_1, i_2, i_3, i_4)$について

$$N_I=\sum_{j=1}^{4n}((b_{i_1j}+b_{i_2j}+b_{i_3j}+b_{i_4j}) \bmod 2)$$

とおく。Iを固定したときN_Iは列に関するHadamard変換により不変である。

次に

$$S_k=\#\{I=(i_1,i_2,i_3,i_4)\ ;\ N_I=k\}$$

$$C_k=S_k+S_{4n-k}$$

とおくとC_kはHadamard変換に対して不変である。

<u>補助定理 2</u>　$B=(b_{ij})$ から相異なる 3 行 (i_1, i_2, i_3) をとりだして固定する。4 点集合 (i_1, i_2, i_3, i_4), $i_4 \neq i_1, i_2, i_3$ について $N_I=0$ または $4n$ となる行 i_4 が存在すれば唯一つである。

(証明) $N_I=0$ または $4n$ となる行が 2 つ、x, y, 存在したとする。$x \neq y$ であるとすると、x 行と y 行の Hamming 距離は $2n$ にならない。

<u>補助定理 3</u>　$B=(b_{ij})$ からとりだした任意の相異なる 3 行に対し $N_I=0$ または $4n$ となる行が必ず存在するならば

$$C_0 = \frac{1}{4}\binom{4n}{3}$$

である。逆も成りたつ。

(証明)　$R=\{(i_1, i_2, i_3, i_4)\ ;\ N_I=0 \text{ または } 4n\}$ とおく。B の相異なる 3 行に対し $N_I=0$ または $4n$ となる行が必ず存在するとする。仮定から、R に含まれる 4 点集合から作られる 3 点集合はすべて異なる。故に

$$4r = 4C_0 = \binom{4n}{3}.$$

逆に　$C_0=\frac{1}{4}\binom{4n}{3}$ とおくと、これは任意の相異なる 3 行に対し $N_I=0$ または $4n$ となる行が必ず 1 行あることを意味する。

5 <u>定理 4</u>　$H=(h_{ij})$ を

(*)　$C_0=\frac{1}{4}\binom{4n}{3}$,　$C_{2n}=\binom{4n}{4}-\frac{1}{4}\binom{4n}{3}$,　$C_l=0$　$l \neq 0, 2n$ のとき

をみたす類に属する $4n$ 次 $(1, -1)$ Hadamard 行列とする。

このとき定理1によって作られた$(4n)^2$次正則対称Hadamard行列 $W = W_+ = W_-$ は loop variable $4n$ をもつ generalized spin model になる。

もしHとH^tの両方とも(*)をみたせば Wも(*)をみたす類に属し、Hから loop variable $(4n)^{2l}$, l 正整数, をもつ generalized spin model の無限系列ができる。

(証明) 条件(*)は$(1, -1)$ Hadamard 行列においては、相異なる3行, i_1, i_2, i_3 行, とりだし固定するとき

$$\sum_{j=1}^{4n} h_{i_1 j} \cdot h_{i_2 j} \cdot h_{i_3 j} \cdot h_{i_4 j}$$

が、ある行i_4について$\pm 4n$となり、それ以外の行については0となることを意味する。

定義の(0), (1H), (2H) が成りたつことは明らか。(3a)で α, β, γ のうち、少なくとも2つが一致するときはHadamard行列Wの正則性に帰着する。そこで α, β, γ は相異なると仮定する。

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ とおく。(3a)の右辺は

$$D\omega(\alpha, \beta)\omega(\alpha, \gamma)\omega(\beta, \gamma)$$

$$= (4n) h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\alpha_1\beta_2} h_{\beta_1\alpha_2} \cdot h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\gamma_1\gamma_2} h_{\alpha_1\gamma_2} h_{\gamma_1\alpha_2} \cdot h_{\gamma_1\gamma_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\gamma_1\beta_2} h_{\beta_1\gamma_2}$$

$$= (4n) h_{\alpha_1\beta_2} h_{\beta_1\alpha_2} h_{\beta_1\gamma_2} h_{\gamma_1\beta_2} h_{\alpha_1\gamma_2} h_{\gamma_1\alpha_2}$$

となる。(3a)の左辺を計算する。

$$S = \sum_{x \in X} \omega(\alpha, x)\omega(x, \beta)\omega(x, \gamma)$$

$$= h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\gamma_1\gamma_2} \sum_{x_1} h_{x_1\alpha_2} h_{x_1\beta_2} h_{x_1\gamma_2} \sum_{x_2} h_{x_1x_2} h_{\alpha_1x_2} h_{\beta_1x_2} h_{\gamma_1x_2}$$

$\sum_{x_2} h_{x_1 x_2} h_{\alpha_1 x_2} h_{\beta_1 x_2} h_{\gamma_1 x_2}$ はある行 $x_1 = \eta$ について $\pm 4n$ で他の行については 0 であるから

$$S = h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\gamma_1\gamma_2} h_{\eta\alpha_2} h_{\eta\beta_2} h_{\eta\gamma_2} (\pm 4n)$$

となる. $\sum_{x_2} h_{\eta x_2} h_{\alpha_1 x_2} h_{\beta_1 x_2} h_{\gamma_1 x_2} = 4n$ (resp. $-4n$) のとき

$$h_{\eta\alpha_2} h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\beta_1\alpha_2} h_{\gamma_1\alpha_2} = h_{\eta\beta_2} h_{\alpha_1\beta_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\gamma_1\beta_2} = h_{\eta\gamma_2} h_{\alpha_1\gamma_2} h_{\beta_1\gamma_2} h_{\gamma_1\gamma_2} = 1 \text{ (resp. } -1)$$

である. 従って

$$S = 4n\, h_{\beta_1\alpha_2} h_{\alpha_1\beta_2} h_{\gamma_1\alpha_2} h_{\alpha_1\gamma_2} h_{\beta_1\gamma_2} h_{\gamma_1\beta_2}$$

となり (3a) が成りたつ.

次に H と H^t の両方とも条件 (*) をみたすとする. $z = (z_1, z_2)$ とおいて

$$\theta = \sum_z \omega(\alpha, z)\omega(\beta, z)\omega(\gamma, z)\omega(x, z)$$

$$= h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\gamma_1\gamma_2} h_{x_1 x_2} \sum_{z_1} h_{z_1\alpha_2} h_{z_1\beta_2} h_{z_1\gamma_2} h_{z_1 x_2} \sum_{z_2} h_{\alpha_1 z_2} h_{\beta_1 z_2} h_{\gamma_1 z_2} h_{x_1 z_2}$$

$\sum_{z_2} h_{\alpha_1 z_2} h_{\beta_1 z_2} h_{\gamma_1 z_2} h_{x_1 z_2}$ はある行 $x_1 = \xi$ について $\pm 4n$ である. また H^t も条件 (*) をみたすから $\sum_{z_1} h_{z_1\alpha_2} h_{z_1\beta_2} h_{z_1\gamma_2} h_{z_1 x_2}$ もある列 $x_2 = \eta$ について $\pm 4n$ である. すなわち θ は (ξ, η) について

$$\theta = h_{\alpha_1\alpha_2} h_{\beta_1\beta_2} h_{\gamma_1\gamma_2} h_{\xi\eta} (\pm 4n)^2 (\pm 4n)^2 = \pm (4n)^2$$

で、他の (x_1, x_2) については 0 である.

$4n = 8$ のときは同値類は 1 つであるが、(*) をみたす. $4n = 12$ のときも同値類は 1 つであるが (*) はみたさない。$4n = 16$ のときは Hall の分類でクラス I が (*) をみたす.

参考文献

[1] E. Bannai and E. Bannai, Spin model on finite cyclic groups, preprint.

[2] E. Bannai and E. Bannai, Generalized generalized spin models, preprint.

[3] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I : Association Schemes, Benjamin/Cummings, 1984.

[4] A. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumeier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag, 1989.

[5] J. M. Goethals and J. J. Seidel, Strongly regular graphs derived from combinatorial designs, Can. J. Math. 12 (1970), 597-614.

[6] A. A. Ivanov and I. V. Chuvaeva, Action of the group M_{12} on Hadamard matrices, Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects, VNIISI, Moscow, Institute for System Studies, 1985, 159-169 (in Russian).

[7] F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomials, Geom. Dedicata 44 (1992), 23-52.

[8] V. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pac. J. Math. 137 (1989), 311-334.

[9] A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, in preparation.

[10] K. Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, preprint.