数理解析研究所講究録
第849巻1993年69-84

Finite Groups and Fusion Algebras

東大数理 和久井道久 (Michihisa Wakui)

§1. はじめに

数理物理における共形場理論の中に，結合的かつ可換な代数が現われます。例えば，SU(2) level K Wess - Zumino - Witten 模型の場合には，次のようになります。3つ穴あき球面の各穴に，SU(2)の表現 i, j, $k \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{K}{2}\}$ が指定されているときの conformal block の空間を $\mathcal{H}_{ijk}$ と書くことにします。$\mathcal{H}_{ijk}$ は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であり，その次元を $N_{ijk} = N_{ij}^{k}$ と書くことにしますと，

$$N_{ij}^{k} = N_{ijk} = \begin{cases} 1, & |i-j| \leqq k \leqq i+j,\ i+j+k \in \mathbb{Z},\ i+j+k \leqq K \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となっています。このとき，N_{ij}^{k} を構造定数としてもつような $\mathbb{C}$ 上の代数を，$\{\phi_i\}_{i=0}^{\frac{K}{2}}$ を基底として，

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_{k=0}^{\frac{K}{2}} N_{ij}^{k} \phi_k$$

によって定義しますと，これは結合的かつ可換であることがわかります。本稿では，Lie 群 SU(2) のかわりに有限群を用いたらどうなるかについて考察したいと思います。

1989年にR. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde とH. Verlinde はorbifold model に対するfusion代数を紹介しました。彼らは，共形場理論に有限群が作用しているときに，その有限群の作用で割って得られるような共形場理論のことをorbifold model と呼んでいます。彼らは，そのfusion 代数の"形"は示しましたが，その構造定数を完全に決定しませんでした。それを成し遂げたのがR. Dijkgraaf とE. Witten [4]です。しかしながら，彼らは，物理的な事実を仮定した上で，これを導いているので，純代数的に導くとどうなるか，ということを調べたのが今回の講演でお話したことです。

§2. quasitriangular quasi-Hopf algebras

$\mathbb{C}$上の代数とは，$\mathbb{C}$上のベクトル空間Aと次の条件を満たす$\mathbb{C}$上の線形写像$m: A\otimes A \longrightarrow A$と$\eta: \mathbb{C} \longrightarrow A$の3つ組($A, m, \eta$)のことをいいました：$m\circ(m\otimes 1) = m\circ(1\otimes m)$，$m\circ(1\otimes\eta) = 1 = m\circ(\eta\otimes 1)$。この代数に，さらに，$\mathbb{C}$上の線形写像$\Delta: A \longrightarrow A\otimes A$と$\varepsilon: A \longrightarrow \mathbb{C}$が与えられていて，$(\Delta\otimes 1)\circ\Delta = (1\otimes\Delta)\circ\Delta$，$(\varepsilon\otimes 1)\circ\Delta = 1 = (1\otimes\varepsilon)\circ\Delta$，$\Delta$と$\varepsilon$は代数準同型，という条件を満たしているとき，組($A, m, \eta, \Delta, \varepsilon$)を双代数といいます。$\Delta$をcomultiplication，$\varepsilon$をcounitと呼びます。双代数が与えられたとき，$\mathbb{C}$上の線形写像$S: A \longrightarrow A$が，$m\circ(S\otimes 1)\circ$

$\Delta=\eta\circ\varepsilon=m\circ(1\otimes S)\circ\Delta$ を満たすとき，S を antipode といいます。S は存在すれば一意的で，組 $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ を $\mathbb{C}$ 上の Hopf 代数と呼びます。antipode S は (i) 反代数準同型，すなわち，$S(a\cdot b)=S(b)\cdot S(a)$，$a, b\in A$，(ii) 反余代数準同型，すなわち，$\sum_i S(a_i)\otimes S(a_i')=\sum_i S(a)_i'\otimes S(a)_i$ （但し，$x\in A$ に対して $\Delta(x)=\sum_i x_i\otimes x_i'$）という重要な性質をもっています。

Hopf 代数の例を述べます。有限群 G の群環 $\mathbb{C}[G]$ は次のようにして Hopf 代数になります： $g\in G$ に対して，

$\Delta(g)=g\otimes g$， $\varepsilon(g)=\delta_{g,1}$ （$\delta_{g,1}$ はクロネッカーのデルタ），$S(g)=g^{-1}$。

さて，Hopf 代数 A が与えられたとき，A の代数としての表現の作るカテゴリーを $\mathcal{R}(A)$ と書くことにします。すると，V, $W\in\mathcal{R}(A)$ に対し，comultiplication Δ を用いて，テンソル積 $V\otimes W$ に A の作用を定義することができます： $a\cdot v\otimes w=\sum_i a_i\cdot v\otimes a_i'\cdot w$，但し，$\Delta(a)=\sum_i a_i\otimes a_i'$。また，$V\in\mathcal{R}(A)$ に対し，antipode S を用いて，双対空間 V^* に A の作用を定義することができます：$(a\cdot f)(v)=f(S^{-1}(a)\cdot v)$，但し，$f\in V^*$, $v\in V$。$\mathbb{C}$ 自身は counit ε により，$\mathbb{C}\in\mathcal{R}(A)$ とみなせます：$a\cdot c=\varepsilon(a)c$，但し，$c\in\mathbb{C}$。$(\Delta\otimes 1)\circ\Delta=(1\otimes\Delta)\circ\Delta$ という性質により，V, W, $U\in\mathcal{R}(A)$ に対し，通常のベクトル空間としての同型 $(V\otimes W)\otimes U\cong V\otimes(W\otimes U)$ は表現としての同型になっていることが

わかります。また，Sが反余代数準同型であることから，V，$W \in \mathcal{R}(A)$に対し，通常のベクトル空間としての同型$(V \otimes W)^* \cong W^* \otimes V^*$は表現としての同型になっていることがわかります。しかし，V，$W \in \mathcal{R}(A)$に対し，通常のベクトル空間としての同型$V \otimes W \cong W \otimes V$は表現としての同型になっているとは限りません。そこで，表現としての同型$V \otimes W \cong W \otimes V$が成り立つように，$A$に"universal"な元$R \in A \otimes A$の存在を仮定したものを<u>quasitriangular Hopf代数</u>と呼びます。具体的な条件としては，例えば，$R \in A \otimes A$は可逆元であって，$\Delta'(a) = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1}$ $(\forall a \in A)$ 但し，$\Delta'(a) = T \circ \Delta$，$T(a \otimes b) = b \otimes a$，が挙げられます。

Drinfel'd [5]は，与えられた有限次元Hopf代数Aに対して，次の条件を満たすquasitriangular Hopf代数$D(A)$の構成方法を与えました。その構成方法は<u>quantum double construction</u>と呼ばれています。

(i)ベクトル空間として，$D(A) \cong A \otimes A^0$，但し，A^0はoppositeなcomultiplicationをもつAの双対Hopf代数，

(ii)包含写像$A \xhookrightarrow{\varphi} D(A)$，$A^0 \xhookrightarrow{\varphi} D(A)$はHopf代数の準同型，

(iii) $R = \sum_i \varphi(e_i) \otimes \varphi(e^i)$，但し，$\{e_i\}$と$\{e^i\}$はdual basis．

Orbifold modelのfusion代数は，特別な場合は，群環$\mathbb{C}[G]$のquantum doubleの表現の指標のなす空間に実現されます。具

体的な作り方は次節にゆずります。

ところで，V，$W \in R(A)$ に対し，テンソル積 $V \otimes W$ への A の作用は，Δ が代数準同型でありさえすれば定義できますし，双対空間 V^* への A の作用は S が反代数準同型でありさえすれば定義できます。そこで，Hopf 代数の条件を少しゆるめて，しかしながら，表現としての同型 $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$ は成り立つように Hopf 代数 A の条件を変えたものを quasi-Hopf 代数と呼んでいます。具体的には，例えば，$\Phi \in A \otimes A \otimes A$ という可逆な元で，任意の $a \in A$ に対して，$(\Delta \otimes 1)(a) = \Phi \cdot (1 \otimes \Delta)(a) \cdot \Phi^{-1}$ となるものが指定されているようなものです。詳しくは，[6] を見て下さい。quasi-Hopf 代数に，さらに前述の R が指定されたものを quasitriangular quasi-Hopf 代数と呼んでいます。quasi-Hopf 代数 A においては，S は反余代数準同型ではありませんが，$(S \otimes S)(\Delta'(a)) = F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1}$ $(\forall a \in A)$ となる可逆な元 $F \in A \otimes A$ が存在するので，表現として，$(V \otimes W)^* \cong W^* \otimes V^*$ が成り立つことがわかります。

§3. 主結果

この節では，Bantay [2] によって導かれた quasitriangular quasi-Hopf 代数 $A(G, \alpha)$ の表現論を利用して，純代数的な手続きによって，orbifold model の fusion 代数 [3] を導くことを目標

にします。

以下，Gを有限群とします。写像 $\alpha: G\times G\times G \longrightarrow U(1)$ が3－コサイクルであるとは，任意の $g, h, k, l \in G$ に対し，

$$\alpha(h,k,l)\alpha(g,hk,l)\alpha(g,h,k) = \alpha(gh,k,l)\alpha(g,h,kl)$$

を満たすものをいいます。3－コサイクル α が normalized であるとは，任意の $g, h \in G$ に対し，$\alpha(g,1,h) = 1$ を満たすことをいいます。Eilenberg と MacLane によって，すべての3－コサイクルは cohomologus の範囲内で normalized 3-cocycle に変形できることが示されています。

example

$G = \mathbb{Z}_m$ (m次巡回群）の場合

$\alpha: G\times G\times G \longrightarrow U(1)$,

$$\alpha(g_1, g_2, g_3) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m^2}\bar{g}_1(\bar{g}_2+\bar{g}_3-\overline{g_2+g_3})\right),$$

（但し，$\bar{g}_i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ は各 i $(i=1,2,3)$ に対して，g_i の代表元）は normalized 3-cocycle になります。

古くからよく知られた概念に，twisted group algebra と呼ばれるものがあります。これは，有限群Gとその2－コサイクル $\theta: G\times G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ （2－コサイクルとは，任意の $g, h, k \in G$ に対して，$\theta(g,h)\theta(gh,k) = \theta(h,k)\theta(g,hk)$ をみたす関数のことです）に対して定義される概念です。ベクトル空間

としては群環$\mathbb{C}[G]$と同じなのですが，ただ，その積が，θによって“ひねられて”いるものです：　$\bar{g}\cdot\bar{h} = \theta(g,h)\overline{gh}$ (但し，$\{\bar{g} \mid g\in G\}$は$\mathbb{C}[G]$の基底を表わす)。これを$\mathbb{C}^{\theta}[G]$と書き表わします。2-cocycle conditionによって，$\mathbb{C}^{\theta}[G]$は結合的な代数になります。

私は当初$\mathbb{C}^{\theta}[G]$にHopf代数の構造あるいはquasi-Hopf代数の構造が入るのではないかと思っていましたが，θが“trivial”でない場合にこれを定義するのはなかなか難しく断念せざるを得ませんでした。そこで，次に考えたのは，$\mathbb{C}^{\theta}[G]\otimes\mathbb{C}^{\theta}[G]^*$にHopf代数の構造あるいはquasi-Hopf代数の構造が入らないかということでした。この頃にP. Bantayの論文[2]を見つけたのですが，彼は次のように考えて，うまくこの問題の解答を与えていました。$\mathbb{C}^{\theta}[G]^* = F(G) = \{G$上の関数全体$\}$に注意します。$D^{\theta}(G) = F(G)\otimes\mathbb{C}^{\theta}[G]$とおきます。そして，$D^{\theta}(G)$がquantum doubleの定義の(iii)で与えられるRをもつquasitriangular quasi-Hopf代数になるためには，θがどういう条件を満たさなければならないかを考えたのです。そのために，$D^{\theta}(G)$を左$F(G)$-moduleとみなし，2-コサイクルθも，この観点から，改めて，$\theta(g,h)\in F(G)$と考え直して，次のように置きました：　$\theta(g,h) = \sum_{k\in G}\theta_k(g,h)P(k)$，

但し，$\{P(k) \mid k\in G\}$は$F(G)$の基底で，$P(k)$はk以外では0，k

では1の値をとる関数です。

このようにして得られた代数が $\mathcal{A}(G,\alpha)$ で，正確な定義は次のようになります。

<u>$\mathcal{A}(G,\alpha)$ の定義</u>

G：有限群，　$\alpha : G\times G\times G \longrightarrow U(1)$ ：normalized 3-cocycle とする。$\mathcal{A}(G,\alpha)$ は $\{P(g)Q(h) \mid g,h\in G\}$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間で，積は

$$P(g)Q(h)\cdot P(k)Q(\ell) = \delta_{g,hkh^{-1}}\,\theta_g(h,\ell)\,P(g)Q(h\ell)$$

で与えられる $\mathbb{C}$ 上の代数です。但し，

$$\theta_g(h,k) = \frac{\alpha(h,h^{-1}gh,k)}{\alpha(g,h,k)\,\alpha(h,k,(hk)^{-1}g(hk))}$$

です。

注：　$\Phi = \sum_{g,h,k\in G}\alpha(g,h,k)P(g)\otimes P(h)\otimes P(k)$ とおいて $F(G)$-module $D^{\theta}(G)$ が quasitriangular quasi-Hopf 代数の条件を満たすための必要十分条件を調べると，α は normalized 3-cocycle でなければならず，上の θ と α の関係式も成り立っていなくてはなりません。さらに，次の補題の関係式も，このような考察の中から自然に導かれるものです。

<u>Lemma 1</u>　任意の $a, g, h, k\in G$ に対して，

$$\theta_a(g,h)\,\theta_a(gh,k) = \theta_{g^{-1}ag}(h,k)\,\theta_a(g,hk)$$

が成り立つ。

<u>Remark</u>　上の補題から、a の centralizer $Z(a)$ に θ_a を制限すると、$\theta_a : Z(a)\times Z(a) \longrightarrow U(1)$ は群 $Z(a)$ の 2－コサイクルになっていることがわかります。

<u>Proposition 1</u>　代数 $\mathcal{A}(G,\alpha)$ は半単純である。

表現 $\rho : \mathcal{A}(G,\alpha) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ に対し，写像 $\psi : G\times G \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\psi(g,h) = \mathrm{tr}\,\rho(P(g)Q(h))$ で定義して，これを ρ に関する<u>指標</u>と呼びます。

<u>Definition</u>　$(g,h)\in G\times G$ が <u>α－regular</u> であるとは，

i) $[g,h] = 1$

ii) $\theta_g(h,k) = \theta_g(k,h)$ for $\forall k \in Z(g)\cap Z(h)$

を満たすことをいう。

<u>Remark</u>　この α－regular という概念は，projective representation theory においてよく知られた，2－コサイクル θ に対する θ－regular という概念の拡張になっています。次の補題も projective representation theory のアナロジーとして得られます。

Lemma 2 (fundamental properties of characters)

character $\psi : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ について次が成立する。

(i) $\psi(k^{-1}gk,\ k^{-1}hk) = \dfrac{\theta_g(k,\ k^{-1}hk)}{\theta_g(h,\ k)}\psi(g,\ h)$

(ii) $(g,\ h)$ が α − regular でない $\Longrightarrow \psi(g,\ h) = 0$

(iii) $\overline{\psi(g, h)} = \theta_g(h,\ h^{-1})^{-1}\,\psi(g,\ h^{-1})$

Lemma 3　次が成り立つ。

$Ch(G,\alpha) := \{\psi : G \times G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi$ は Lemma 2 の (i), (ii) を満たす関数$\}$ とおく。$Ch(G,\alpha)$ は，$\mathcal{A}(G,\alpha)$ の指標全体で生成される $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と一致する。

$\mathcal{A}(G,\alpha)$ は quasitriangular quasi - Hopf 代数なので，2つの $\mathcal{A}(G,\alpha)$ の表現 V と W のテンソル積 $V \otimes W$ は再び $\mathcal{A}(G,\alpha)$ の表現になります。この trace をとることにより，V，W に関する指標 φ，ψ に対して，積 $\varphi * \psi \in Ch(G,\alpha)$ を定義することができます。表現としての同型 $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$，$V \otimes W \cong W \otimes V$ の存在によって，$Ch(G,\alpha)$ は結合的かつ可換な代数になります。

$g \in G$ に対し，$\chi_a^g : Z(g) \longrightarrow \mathbb{C}$ $(a = 0, 1, \cdots, t(g))$ を θ_g を 2 - コサイクルとする既約な射影指標（すなわち，twisted group algebra $\mathbb{C}^{\theta_g}[Z(g)]$ の既約表現の指標）全体としたときに，Ch(

G, α) の元 $\hat{\chi}_a^g : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ を構成します。

Definition　$\chi_a^g : Z(g) \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，

$\hat{\chi}_a^g : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$[k, h] \neq 1$ のとき $\hat{\chi}_a^g(k, h) = 0$,

$[k, h] = 1$ のとき

$$\hat{\chi}_a^g(k, h) = \begin{cases} \dfrac{\theta_g(\ell, h)}{\theta_g(\ell h \ell^{-1}, \ell)} \chi_a^g(\ell h \ell^{-1}) & \text{if } k = \ell^{-1} g \ell \text{ for } {}^\exists \ell \in G \\ 0 & \text{if } k \text{ と } g \text{ は conjugate でない} \end{cases}$$

Remark　次の規約

$$\chi_a^{\ell^{-1} g \ell}(\ell^{-1} h \ell) = \frac{\theta_g(\ell, \ell^{-1} h \ell)}{\theta_g(h, \ell)} \chi_a^g(h) \qquad (h \in Z(g))$$

を設けると，$\hat{\chi}_a^g$ は g の属する共役類 C_i の代表元のとり方によらないことがわかります。このとき，$\hat{\chi}_a^i := \hat{\chi}_a^g \quad (g \in C_i)$ と書くことにします。

Theorem　$\{\hat{\chi}_a^i\}_{i,a}$ は $Ch(G, \alpha)$ の $\mathbb{C}$ 上の基底であり，

$$\hat{\chi}_a^i * \hat{\chi}_b^j = \sum_{k,c} N_{(i,a)(j,b)}^{(k,c)} \hat{\chi}_c^k$$

とおくと，

$$N_{(i,a)(j,b)}^{(k,c)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in C_i,\ k \in C_j,\ m \in C_k \\ p \in G,\ m = gk \\ [g,p] = [k,p] = [m,p] = 1}} \theta_p(g, k) \chi_a^g(p) \chi_b^k(p) \overline{\chi_c^m(p)}$$

Remark　これが，Dijkgraaf, Vafa, Verlinde, Verlinde の導いた orbifold model の fusion 代数[3]です。驚くべきことは，こ

の構造定数$N_{(i,a)(j,b)}^{(k,c)}$が非負整数になるということです。

§4. Discussions

最近いろいろな人々によって，共形場理論における fusion 代数のもつ代数的性質のみ抽出して，純代数的な立場から，fusion 代数が研究されています。E. Bannai [1] による <u>fusion algebra at algebraic level</u> という概念はそのうちの1つです。

<u>Definition</u>　$\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ を $x_0, x_1, \cdots, x_d$ を基底にもつ $\mathbb{C}$ 上の代数とする。構造定数を

$$x_i \cdot x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^{k} x_k$$

により定義する。次の(0)〜(iv)の条件を満たすとき $\mathfrak{A}$ を fusion algebra at algebraic level という。

(0) 代数 $\mathfrak{A}$ は結合的かつ可換

(i) $N_{ij}^{k} \in \mathbb{R}$

(ii) $\exists\ \hat{} : \{0, 1, \cdots, d\} \longrightarrow \{0, 1, \cdots, d\}$: 全単射

s.t. (a) $\hat{\hat{i}} = i$　(b) $N_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = N_{ij}^{k}$　(c) $N_{ijk} := N_{ij}^{\hat{k}}$ は i, j, k に関して symmetric

(iii) $N_{0j}^{k} = \delta_{jk}$　(すなわち，x_0 は $\mathfrak{A}$ の単位元)

(iv) $\exists\ \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C}$: 代数の表現 s.t. $x_i \longmapsto \sqrt{k_i}$ for some $k_i > 0$ $(0 \leqq i \leqq d)$

$Ch(G,\alpha)$は定理で与えた基底に関して fusion algebra at algebraic level の公理を満たします。χ_0に対応するものとしては，共役類 $C_0=\{1\}$ と $Z(1)=G$ の trivial な表現の指標χ_0^0 から導かれる$\hat{\chi}_0^0$をとることができます。また，全単射 ^ は $(i,a)\hat{}=(\hat{i},a)$，但し，$C_{\hat{i}}:=\{g\in G \mid g^{-1}\in C_i\}$，で与えることができます。代数の表現 $Ch(G,\alpha)\longrightarrow\mathbb{C}$ としては，$\hat{\chi}_a^i\longmapsto\sum_{g\in C_i}\chi_a^g(1)$ をとることができます。詳しくは，[8]を見て下さい。

$Ch(G,\alpha)$ は既約指標全体 $Irr(G,\alpha)$ を基底にもちますが，この基底に関しても fusion algebra at algebraic level の公理を満たしていることがわかります。実際，これは，半単純な quasi-triangular quasi-Hopf 代数 A の表現の指標の生成する空間 Ch(A) に対して成り立ちます。例えば，(0)，(iii)は表現としての同型 $V\otimes(W\otimes U)\cong(V\otimes W)\otimes U$，$V\otimes W\cong W\otimes V$，$\mathbb{C}\otimes V\cong V\cong V\otimes\mathbb{C}$ の存在からわかります。また，quasi triangular quasi-Hopf 代数Aにおいては，任意の$a\in A$に対して，$S^2(a)=u\cdot a\cdot u^{-1}$ となるような可逆な元 $u\in A$ が構成できるので，表現としての同型 $V^{**}\cong V$が得られます。これによって，Vが既約な表現ならばV^*も既約であることがわかって，Aの既約指標全体 $Irr(A)$ に全単射^を定めることができます。さらに，第２節の最後に述べましたが，表現としての同型 $(V\otimes W)^*\cong V^*\otimes W^*$ が存在するので，(ii)の(b)を得ることができます。(iv)の代数準

同型としては，指標の次数（character degree）を対応させればよいでしょう。このようにして，半単純な quasitriangular quasi－Hopf 代数 A の指標の生成するベクトル空間 Ch(A) は既約指標の全体 Irr(A) に関して，fusion algebra at algebraic level の公理を満たします。A が必ずしも半単純でなくても，modular Hopf 代数[7]のような公理を満たしているときには同様な議論で fusion algebra at algebraic level の例を作ることができると思います。この場合には，modular 群 SL(2, $\mathbb{Z}$) が Ch(A) に作用すると思いますが，その作用に関して，$S : \tau \to -\frac{1}{\tau}$ は unitary かつ symmetric な，$T : \tau \to \tau+1$ は diagonal な行列として表わされ，いわゆる Verlinde identity も成り立つのではないかと思っています。

もう少し根も葉もない話を書かせてください。代数的組合せ論に association scheme の概念があり，この association scheme から，いわゆる Bose－Mesner 代数と呼ばれる代数が定義されます。この代数は character algebra と呼ばれるものになっていて，この character algebra と fusion algebra at algebraic level が 1 対 1 に対応することが E. Bannai[1]によって示されています。一般に，character algebra がいつ association scheme の Bose－Mesner 代数になるのかはわかっていないようですが，Ch(G, α) がある association scheme の Bose－Mesner 代数になるかど

うかがわかると、最近の spin model からの link の不変量の話と関連して面白いと思っています。ちなみに、Ch(G, α) は、$\mathcal{A}(G, \alpha)$ の中心 $Z(\mathcal{A}(G, \alpha))$ と同型であることが、Verlinde 等式を仲介にしてわかっています[8]が、群環 $\mathbb{C}[G]$ については、中心 $Z(\mathbb{C}[G])$ はいわゆる group association scheme の Bose - Mesner 代数に同型であることがよく知られています。

付記：最近、九大の宗政氏は、orbifold model の fusion 代数を中心 $Z(\mathcal{A}(G, \alpha))$ に直接作りました。

References

[1] E. Bannai "Association schemes and fusion algebras (an introduction), (1992) preprint

[2] P. Bantay "Orbifolds, Hopf algebras and moonshine" Lett. Math. Phys. 22 (1991), 187 - 194

[3] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde and H. Verlinde "The operator algebra of orbifold models" Commu. Math. Phys. 123 (1989), 485 - 526

[4] R. Dijkgraaf and E. Witten "Topological gauge theories and group cohomology" Commu. Math. Phys. 129 (1990), 393 - 429.

[5] V. G. Drinfel'd "Quantum groups" in Proc. Int. Congress of Math. (Acad. Press, Berkeley, California 1986), 798 - 820.

[6] V. G. Drinfel'd "Quasi-Hopf algebras" Leningrad Math. J. 1 (1990) 1419 – 1457

[7] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev "Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups" Invent. Math. 103 (1991), 547 – 597

[8] M. Wakui "Fusion algebras for orbifold models" preprint