数理解析研究所講究録
第850巻 1993年 33-41

確率微分方程式の数値近似について

岡山理科大　渡邊寿夫（Hisao Watanabe)

拡散過程は確率微分方程式の解として実現できる．それは常微分方程式が確率的揺動，すなわち，ブラウン運動（数学ではしばしばWiener過程と呼ばれている）による揺動をうけたものとして表わされている．実際の現象では揺動は近似的なブラウン運動であろう．そのとき得られる過程はどのような意味で確率微分方程式で近似されるかが問題となるであろう．また，コンピュータ上で確率微分方程式の解を実現しようとするときの問題もあろう．

1　確率微分方程式の解の近似

確率微分方程式は次のように書かれる．

$$\begin{aligned} x^i(t) &= x^i(0) + \int_0^t a^i(x(s))ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \int_0^t b^i_j(x(s))dw^j(s), \quad (i = 1, 2, \ldots, d) \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$w(t) = (w^1(t), \cdots, w^m(t))$ は m 次元Wiener過程であり，平均と共分散がそれぞれ

$$E(w^i(t)) = 0,$$
$$E(w^i(t)w^j(s)) = \delta_{ij}\min(t, s)$$

によって与えられるGauss過程である．式(11)は次の条件のもとで解 $x(t)$ が存在して一意であることが知られている．式(11)は次の条件のもとで解 $x(t)$ が存在して一意であることが知られている．

$$\begin{aligned} &(a) \qquad |a^i(x) - a^i(y)| + |b^i_j(x) - b^i_j(y)| \leq K|x-y| \\ &(b) \qquad a^i(x)^2 + b^i_j(x)^2 \leq K(1+|x|^2) \\ &\qquad\qquad\qquad (i = 1, \ldots, d; j = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

ここで，$K > 0$ は定数である．

式の近似解を求めるうえで，伊藤の公式は重要な役割を果たす．

$x(t) = (x^1(t), \cdots, x^d(t))$ を式の解とし，$f \in C^2$(2回連続微分可能な関数)とすると，

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= f(x(s)) \\ &\quad + \int_s^t L_1 f(x(u))du + \sum_{j=1}^m \int_s^t (L_2 f(x(u)))_j dw^j(u) \end{aligned} \tag{12}$$

ここで，

$$(L_1 f)(x) = \sum_{i=1}^d a^i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^d b^i_k(x) b^j_k(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$((L_2 f)(x))_j = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} b_j^i(x), \quad (j = 1, \ldots, m)$$

である.

Tを固定して，$[0, T]$ での $x(t)$ の近似解を求めるために，$x(t)$ の Taylor 展開を用いよう．$0 \leq s \leq t \leq T$として，$x(t)$ を $x(s)$ の周りで Taylor 展開する．式(11) より，

$$x^i(t) = x^i(s) + \int_s^t a^i(x(u))du + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t b_j^i(x(u))dw^j(u),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, d)$$

となるが，さらに $a^i(x(u)), b_j^i(x(u))$ に対して伊藤の公式を適用すると，次の式が得られる．

$$\begin{aligned}
x^i(t) = {} & x^i(s) + a^i(x(t))(t-s) + \int_s^t du \int_s^u \{L_1 a^i(x(v))dv + \sum_{j=1}^{m} (L_2 a^i(x(v))_j dw^j(v)\} \\
& + \sum_{j=1}^{m} b_j^i(x(s)) \int_s^t dw^j(u) \\
& + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t dw^j(u) \int_s^u \{L_1 b_j^i(x(v))dv + \sum_{k=1}^{m} (L_2 b_j^i)(x(v)))_k dw^k(v)\}
\end{aligned}$$

さらに，伊藤の公式を用いて展開すると，次の式が得られる．

$$\begin{aligned}
x^i(t) = {} & x^i(s) + a^i(x(s))(t-s) + L_1 a^i(x(s)) \int_0^t du \int_s^u dv \\
& + \int_s^t du \int_s^u (L_1 a^i(x(v)) - L_1 a^i(x(s))dv \\
& + \sum_{j=1}^{m} (L_2 a^i(s))_j \int_s^t du \int_s^u dw^j(v) \\
& + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t du \int_s^u (L_2 a^i(x(v)) - L_2 a^i(x(s)))_j dw^j(v) \\
& + \sum_{j=1}^{m} b_j^i(x(s)) \int_s^t dw^j(u) + \sum_{j=1}^{m} L_1 b_j^i(x(s)) \int_s^t dw^j(u) \int_s^u dv \\
& + \sum_{j=1}^{m} \int_s^t dw^j(u) \int_s^u \{(L_1 b_j^i)(x(v)) - (L_1 b_j^i)(x(s))\}dv \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (L_2 b_j^i(x(s)))_k \int_s^t dw^j(u) \int_s^u dw^k(v) \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \int_s^t dw^j(u) \int_s^u dw^k(v) \int_s^v L_1(L_2 b_j^i(x(r))_k)dr \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} L_2(L_2(b_j^i(x(s))_k)_l \int_s^t dw^j(u) \int_s^u dw^k(v) \int_s^v dw^l(r) \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \int_s^t dw^j(u) \int_s^u dw^k(v) \\
& \times \int_s^v \{(L_2(L_2(b_j^i(x(r))_k))_l - L_2(L_2(b_j^i(x(s))_k)_l\}dw^l(r)
\end{aligned} \tag{13}$$

式(13) で $d=m=1$ のとき，伊藤の公式を適用して得られる公式

$$\begin{aligned}\int_a^b dw(\tau)\int_a^\tau dw(u) &= \frac{1}{2}(w(b)-w(a))^2-\frac{1}{2}(b-a),\\ \int_a^b dw(\tau)\int_a^\tau dw(u)\int_a^u dw(v) &= \frac{1}{6}(w(b)-w(a))^3-\frac{1}{2}(b-a)(w(b)-w(a))\end{aligned}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}x(t) &= x(s)+a(x(s))(t-s)+b(x(s))(w(t)-w(s))\\ &\quad+\frac{1}{2}L_2b(x(s))((w(t)-w(s))^2-(t-s))+L_2a(x(s))\int_s^t(w(u)-w(s))du\\ &\quad+L_1b(x(s))\int_s^t(u-s)dw(u)+\frac{1}{2}L_1a(x(s))(t-s)^2\\ &\quad+\frac{1}{6}(L_2)^2b(x(s))(((w(t))-w(s))^3-3(t-s)(w(t)-w(s)))+R \qquad (14)\end{aligned}$$

が得られる．Rは剰余項である．式(13)，式(14) を用いると，確率微分方程式(11) の解の離散近似アルゴリズムが得られる．区間 $[0,T]$ を等分割して，

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T,\quad t_i=\frac{T}{n}i(i=0,1,\ldots,n),\quad \Delta=\frac{T}{n}$$

とおこう．$x(t_k)$ に対する近似として x_k とおき，$w^i(t_{k+1})-w^i(t_k)=\Delta_{k+1}w^i$ と書くことにすると，

$$x_{k+1}^i=x_k^i+a^i(x_k)\Delta+\sum_{j=1}^m b_j^i(x_k)\Delta_{k+1}w^j \quad (i=1,2,\ldots,d) \qquad (15)$$

は式(13) で第2項までとって作ったもので，Euler の Algorithm と呼ばれる．

$d=m=1$ のとき，式(15) において第4項までとると次の algorithm が得られる．

$$x_{k+1}=x_k+a(x_k)\Delta+b(x_k)\Delta_{k+1}w+\frac{1}{2}b'(x_k)b(x_k)((\Delta_{k+1}w)^2-\Delta) \qquad (16)$$

これは Milshtein [1] の algorithm と呼ばれている．

$d=m=1$ でないときには，

$$\int_s^t dw^j(u)\int_s^u dw^k(v) \quad (j\neq k)$$

は $(w^i(t)-w^i(s)),(w^k(t)-w^k(s))$ を用いて表すことができない．しかし，

$$\begin{aligned}&\int_s^t(w^k(u)-w^k(s))dw^j(u)+\int_s^t(w^j(u)-w^j(s))dw^k(u)\\ &\qquad=(w^k(t)-w^k(s))(w^j(t)-w^j(s))\end{aligned}$$

なる関係式が成り立つ．従って次の可換性の条件

$$\text{(c)}\qquad \sum_{l=1}^d b_{j_1}^l(x)\frac{\partial b_{j_2}^k(x)}{\partial x_l} = \sum_{l=1}^d b_{j_2}^l(x)\frac{\partial b_{j_1}^k(x)}{\partial x_l} \quad (x\in R^d),$$
$$(k=1,2,\ldots,d;\quad j_1,j_2=1,2,\ldots,m)$$

が満たされるとき，次のアルゴリズムが得られる．

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}^i &= x_k^i + a^i(x_k)\Delta + \sum_{j=1}^m b_j^i(x_k)\Delta_{k+1}w^j \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^m \sum_{l=1}^d b_{j_1}^l(x_k)\frac{\partial b_{j_2}^i(x_k)}{\partial x_l}\Delta_{k+1}w^{j_1}\Delta_{k+1}w^{j_2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^d b_j^l(x_k)\frac{\partial b^i}{\partial x_l}(x_k)\Delta \qquad (17) \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, d; k = 0, 1, \ldots, n-1)
\end{aligned}
$$

つぎに近似誤差の評価であるが，Euler algorithm (15) に対して，$x(t_k)$ に対する近似値 x_k と $x(t_{k+1})$ の近似値 x_{k+1} の間を直線で補間して得られる近似解を $x_n(t)$ で表すとき，真の解 $x(t)$ に対して，条件 (a),(b) が満たされているとき，

$$E(|x_n(t) - x(t)|^2) = O(\Delta)$$

が示されている．

Milshtein の algorithm (16) に対しては，a, b が C^2 クラスに属し，a, a', b, b' が一様に Lipshitz 条件を満たすとき，

$$E(|x_n(t) - x(t)|^2) = O(\Delta^2) \qquad (18)$$

であることが示されている（Milshtein [1], Talay [2]）．

algorithm(17) に対しても，類似の誤差評価が得られる．

$d = m = 1$ のとき，式 (14) で Rを除いた項を全部とって次の algorithm を作ることができる．

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + a(x_k)\Delta + b'(x_k)\Delta_{k+1}w + \frac{1}{2}(b'b)(x_k)(\Delta_{k+1}w)^2 \\
&\quad + (ab' - \frac{1}{2}b(b')^2)(x_k)\Delta\Delta_{k+1}w + \frac{1}{6}b((b')^2 + bb'')(x_k)(\Delta_{k+1}w)^3 \\
&\quad + (a'b - ab' - \frac{1}{2}(bb'')^2)(x_k)\int_{t_k}^{t_k}(w(s) - w(t_k))ds \qquad (19)
\end{aligned}
$$

これは Platen [3] によって提案されたものである．式 (19) によって得られる近似解 $x_n(t)$ に対しては，

$$E(|x_n(t) - x(t)|^2) = O(\frac{1}{n^3})$$

であることが示されている．しかし近似解は最後に確率積分の項が含まれているのでΔと$\Delta_k w$とによって計算できるわけではない．

以上 Taylor 展開に基づく近似 algorithm を述べた．以上の方法で精度を上げようとすると a, b について強い滑らかさを仮定しなければならない．しかしながら，常微分方程式に対する数値解法における Runge-Kutta 法の類似 algorithm が存在する．

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + a(x_k)\Delta - b(x_k)\sqrt{\Delta} \\
&\quad + b(x_k + \frac{1}{2}b(x_k)(\Delta_{k+1}w - \sqrt{\Delta}))(\Delta_{k+1}w + \sqrt{\Delta}) \qquad (110) \\
&\qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)
\end{aligned}
$$

が Newton [5] によって提案されている algorithm である.

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k)\Delta + b(x_k)\Delta_{k+1}w$$
$$+\frac{1}{2}\Delta^{-1/2}(b(x_k + b(x_k)\sqrt{\Delta}) - b(x_k)))((\Delta_{k+1}w)^2 - \Delta), \tag{111}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

は Platen [3] によって提出されているものである.

Clark, Newton [5] は Efficient approximation という概念を導入しているが，この意味で効率的な algorithm として Newton は次のものを提案している.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2}(a_0 + a_1)\Delta + \frac{1}{40}(37b_0 + 30b_2 - 27b_3)\Delta_{k+1}w$$
$$+\frac{1}{16}(8b_0 + b_1 - 9b_2)\sqrt{3\Delta} \tag{112}$$

ここで,

$$a_0 = a(x_k), \quad b_0 = b(x_k),$$
$$a_1 = a(x_k + a_0\Delta + b_0\Delta_{k+1}w), \quad b_1 = b(x_k - \frac{2}{3}b_0(\Delta_{k+1}w + \sqrt{3\Delta})),$$
$$b_2 = b(x_k + \frac{2}{9}b_0(3\Delta_{k+1}w + \sqrt{3\Delta})),$$
$$b_3 = b(x_k - \frac{20}{27}a_0\Delta + \frac{10}{27}(b_1 - b_0)\Delta_{k+1}w - \frac{10}{27}b_1\sqrt{3\Delta})$$

である.

これらに対しても誤差評価がなされているが，それらは a, b について滑らかさを仮定して得たものであるので正確なところは不明である.

以上 Taylor 展開に基づいて，真の $w(t)$ が知られたとき，$\Delta_k w, \Delta$ により近似解の構成について述べた．しかし，現実には Wiener 過程の標本値を知ることはできない．Computer 上で実行しようとすると，疑似乱数を用いねばならない．このことは $\Delta_k w$ を別の確率変数で置き換えることを意味する．いま，$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ を独立同分布をもつ確率変数列で次の条件を満たすとしよう.

$$E(\xi_k^6) < \infty, \quad E(\xi_k^p) = 0, \quad p = 1, 3, 5;$$
$$E(\xi_k^2) = 1, \quad E(\xi_k^4) = 3$$

例えば，ξ_k として,

$$p(\xi_k = \sqrt{3}) = p(\xi_k = -\sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad p(\xi_k = 0) = \frac{2}{3}$$

の様に選んでもよい．このような確率変数列が得られたとき，$\Delta_k w$ の代わりに，$\sqrt{\Delta}\xi_k$ を用いて，algorithm を構成すればよい．このとき誤差評価は別の criterion を用いねばならない．$x(t)$ と近似解 $x_n(t)$ とは同一の確率空間上にないからである．Euler algorithm に対しては Talay によって,

$$|E(f(x(t))) - E(f(x_n(t)))| = O(\Delta)$$

であることが示されている. (1.10) において，$\Delta_k w$ を $\sqrt{\Delta}\xi_k$ とし，$\Delta z_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(w(s)-w(t_k))ds$ の代わりに $\frac{2}{3}\Delta^{3/2}\xi_k$ とおいて得られた algorithm に対して,

$$|E(f(x(t))) - E(f(x_n(t)))| = O(\Delta^2) \tag{113}$$

であることをTalay[2]は証明している．詳しく述べると，a,b はクラス C^6 に属し，$i(1\le i\le 6)$ 回まで導関数は有界とし，b^2b'',b^2a'' は class $P_1(R)$ に属し，f はクラス C^6 で，ある k に対して $f^{(6)}\in P_k(R)$ であるとき，式 (113) が成り立つ．ただし，関数 $g(R^d\to R)$ が class$P_k(R)$ の関数であるとは，ある $C\ge 0$ が存在して，$|g(x)|\le C(1+|x|^k)$ がすべての $x\in R^d$ に対して成り立つことである．

以上主として時間の分割は等間隔（軌道によらない分割）であった．random な分割による近似アルゴリズムがNewton[6] によって提案されている．式 (11) で $m=1$ の場合を考えている．$w(t)$ の各 $k\delta(k=0,\pm1,\ldots)$ 迄の最小到達時刻を用いるのである．つまり，$\tau_0=0$ とし，

$$\tau_{n+1}=\tau_n+\inf\{t\ge 0|\quad |w(\tau_n+t)-w(\tau_n)|=0\},\quad n=0,1,\ldots$$

とする．

$$\alpha_n=\delta^{-3}(w(\tau_n)-w(\tau_{n-1}))(\tau_n-\tau_{n-1})=\beta\gamma_n\quad(n=1,2,\ldots)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\beta_n &= \mathrm{sign}(\alpha_n)=\delta^{-1}(w(\tau_n)-w(\tau_{n-1})),\\ \gamma_n &= |\alpha_n|=\delta^{-2}(\tau_n-\tau_{n-1})\end{aligned}$$

この分割点 $\{\tau_n\}$ を用いた Euler algorithm は

$$\begin{aligned}x_0 &= x,\\ x_{n+1} &= x_n+b(x_n)\beta_{n+1}\delta+a(x_n)\gamma_{n+1}\delta^2\end{aligned}$$

で定義される．ただし，$x=(x^1,\ldots,x^d)$，$a=(a^1,\ldots,a^d)$，$b=(b^1,\ldots,b^d)$ である．また，Milshtein の algorithm は

$$\begin{aligned}x_0 &= x,\\ x_{n+1}^i &= x_n^i+b^i(x_n)\beta_{n+1}\delta+a^i(x_{n+1})\gamma_{n+1}\delta^2+\frac{1}{2}Bb^i(x_n)(1-\gamma_{n+1})\delta^2\\ &= x_n^i+b^i(x_n)\beta_{n+1}\delta+(c^i(x_n)\gamma_{n+1}+\frac{1}{2}Db^ib(x_n)\delta^2\end{aligned}$$

ここで，

$$B=\sum_{i=1}^d b^i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad D=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}),\quad c^i=a^i-\frac{1}{2}Db^ib$$

これらの algorithm によって得られたものの近似の程度は固定分割の場合と同程度のものである．しかし，Newton [6] は漸近的に効率的 (Asymptotically efficient) な近似法という概念を導入しその意味で効率的な次の algorithm を提案している．

$$\begin{aligned}x_0 &= x,\\ x_{n+1}^i &= x_n^i+b^i(x_n)\beta_{n+1}\delta+a^i(x_{n+1})\gamma_{n+1}\delta^2+\frac{1}{2}Bb^i(x_n)(1-\gamma_{n+1})\delta^2\\ &\quad+\beta a^i(x_n)\beta_{n+1}f(\gamma_{n+1})\delta^3+Ab^i(x_n)\beta_{n+1}(\gamma_{n+1}-f(\gamma_{n+1}))\delta^3\\ &\quad+\frac{1}{6}B^2b^i(x_n)\beta_{n+1}(1-3\gamma_{n+1})\delta^3+(\frac{5}{6}A-\frac{1}{3}B^2)a^i(x_n)\delta^4\\ &= x_n+b^i(x_n)\beta_{n-1}\delta+(c^i(x_n)\gamma_{n+1}+\frac{1}{2}Db^ib(x_n)\delta^2\\ &\quad+(Dc^ib(x_n)f(\gamma_{n+1})+Db^ic(x_n)(\gamma_{n+1}-f(\gamma_{n+1}))\\ &\quad+\frac{1}{6}D(Db^ib)b(x_n)\beta_{n+1}\delta^3+(\frac{5}{6}A-\frac{1}{3}B^2)a^i(x_n)\delta^4\end{aligned}$$

ここで,

$$A=\sum_{i=1}^{d}a^i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}b^ib^j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

であり,

$$f(t)=\frac{128}{\pi^4}\frac{\sum_{n:even}\sum_{m:odd}\sin(\frac{m\pi}{2})\frac{n^2m}{(n^2-m^2)^3}[\exp(-\frac{m^2\pi^2}{8}t)-\exp(-\frac{n^2\pi^2}{8}t)]}{\sum_{k:odd}\sin(\frac{k\pi}{2})k\exp(-\frac{k^2\pi^2}{8}t)}\quad (t>0)$$

2 確率微分方程式の近似

Wong と Zakai[7] とは確率微分方程式が“近似的に白色（ブラウン運動）”である雑音によって駆動された微分方程式のモデルとして用いることができるかという疑問を提出した．その結果として，一般にはある付加的な補正を必要とすることを述べている．このことをある離散モデルで述べてみよう．あるパラメータ $\varepsilon>0$ を含む

(214)
$$\begin{aligned} x^{\varepsilon}_{n+1} &= x^{\varepsilon}_n-\varepsilon F(x^{\varepsilon}_n,n+1,\omega)+o(\varepsilon^2)\\ x^{\varepsilon}_0(a) &= x_n(a) \end{aligned}$$

で定義される R^d の値をとる確率過程である．モデル (214) は式 (11の右辺第 2 項：確定項（a を含むもの）を外したものである．F はランダムな項で，次の条件を満たすとする．平均 0，つまり，$E(F(n,x,\omega))=0$．R^d の元 x を固定したとき，定常確率過程である．

$$E(\sup_{|x|\le M}|D^{\beta}F(n,x,\omega)|^8)\le C,\quad 0\le|\beta|\le 3$$

で

$$D^{\beta}=D^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_d}\quad (|\beta|=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_d)$$

は x_i について β_i 回の偏微分を表す．$F(n,x,\omega)$ は $|x|\le M$ に関して一様に混合的 (mixing) である．そのとき，

(215)
$$\begin{aligned} &x^{\varepsilon}(t)=x^{\varepsilon}_j+(t-j\varepsilon^2)/\varepsilon^2(x^{\varepsilon}_{j+1}-x^{\varepsilon}_j)\\ &j\varepsilon^2\le t\le(j+1)\varepsilon^2\qquad (j=0,1,2,\ldots) \end{aligned}$$

で定義される確率過程 $x^{\varepsilon}(t)$ は次の確率微分方程式の解に分布の意味で収束する．

(216)
$$x^i(t)=x^i(0)+\int_0^t a^i(x(s))ds+\sum_{j=1}^{d}\int_0^t\sigma^i_j(x(s))dw^j(s)$$

ここで

$$\begin{aligned} a^i(x) &= \sum_{l=1}^{d}\sum_{n=1}^{\infty}E(F_l(x,n,\omega))D_{x_l}F_i(x,n,\omega)))\\ \sum_{j=1}^{d}\sigma^k_j(x)\sigma^l_j(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(E(F_k(x,0,\omega)F_l(x,n,\omega)+F_l(x,0,\omega)F_k(x,n,\omega))\\ &\quad +E(F_k(x,0,\omega)F_l(x,0,\omega)) \end{aligned}$$

である．詳しいことは，H.Watanabe [8] およびその参考文献を参照されたい．この事実は確率場 $\{F(n,x,\omega)\}$ が n に関し独立確率変数でないときには，drift 項がつけ加わることを意味している．

次に transport process を利用して Wiener 過程を近似した場合を述べよう．$v(t)$ を 2 値の状態をとるマルコフ連鎖で推移確率が $p(t) = e^{tA}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられているとする．

$$y_n(t) = n\int_0^t v(n^2 s)ds$$

と定義する．いま，$\tau_1, \tau_2, \ldots$ を指数 n^2 の指数分布に従う独立な確率変数列としよう．そのとき，$y_n(t)$ は最初は$\frac{1}{2}$の確率で傾き n または$-n$ の直線運動をし，時刻τ_1後に傾きをかえ（最初 n なら$-n$ に変わる），さらに，時刻τ_2経ったときまた傾きを変えて直線運動を続けて行く．そのとき，確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le 1} |y_n(t) - w(t)| = 0$$

であることがわかる．つまり，各有限時間内で $y_n(t)$ は Wiener 過程を一様近似する．この $y_n(t)$ を用いて作った微分方程式

$$dx_n(t) = a(x_n(t))dt + b(x_n(t))dy_n(t)$$

の解 $x_n(t)$ はつぎの確率微分方程式の解に収束する．

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t)) \circ dw(t)$$

ここで $\circ dw(t)$ は Stratonovich 積分を表す．その収束の速度についてのべよう．$x_n(t)$ の $C[0,T]$ 上に導く確率法則を p^{x_n}，$x(t)$ の確率法則を p^x で表す．$\rho(p^{x_n}, p^x)$ を Lévy による分布距離とすると，

$$\rho(p^{x_n}, p^x) = O[n^{-1/2}\exp(C(\log n)^{1/2})]$$

であることを，Csörgo and Horáth [9] は導いている．

参考文献

[1] G.N.Milshtein:A method of second-order accuracy for the integration of stochastic differential equations, Theory of Probability and Its Applications, 23, 396-401,1978

[2] E.Pardoux and D.Talay: Discretization and simulation of stochastic differential equations, Acta Applicable Mathematicae, 3, 23-47, 1985

[3] P.E. Kloeden and E.Platen: A survey of numerical methods for stochastic differential equations. Stochastic Hydrology and Hydraulics, 3, 155-178,1989（これには多くの文献が引用されている）

[4] P.E.Kloeden and E.Platen. Numerical solutions of stochastic differential equations,Springer-Verlag,1992.

[5] N.J.Newton: Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Itô and Stratonovich equations, SIAM J. Appl. Math., 51, 542-567,1991

[6] N.J.Newton: An efficient approximation for stochastic differential equations on the partition of symmetrical first passage times, Stochastics and Stochastic Reports, 29, 227-258,1990

[7] E.Wong and M.Zakai: On the relationship between ordinary and stochastic differential equations, Internat. J. Engng. Sci. 3, 213-229,1965

[8] H.Watanabe: Diffusion approximations of some stochastic difference equations, revisited, Stochastic Processes and their Applications, 29, 147-154,1988

[9] M.Csörgo and L.Horáth: Rate of convergence of transport process with an application to stochastic differential equations, Probab. Th. Rel. Fields. 78,379-389,1988.