数理解析研究所講究録
第853巻 1993年 108-117


# 茨大型ライフゲーム

加納幹雄
佐々木哲也　藤田宏明　星　誠司
茨城大学 工学部 情報工学科

## 1 茨大型ライフゲーム

ライフゲームは良く知られたゲームであるが、簡単にこれを紹介する。まず図1のように無限に広がった格子のいくつかのセル (枡目) にかってに石を置き、これを初期状態として次に述べるルールでこれを次々に変えて行く。ライフゲームはこの状態の変化を楽しむゲームである。まず各セルの周りの8つのセルにある石の数を数える (図1)。そして

- 石のあるセルに対しては、周りに2個または3個石があればそのまま生き残り、これ以外では死んでなくなる。
- 石のないセルに対しては、周りに3個石があるときに限りこのセルに新しく石が生まれ、これ以外ではないままである。

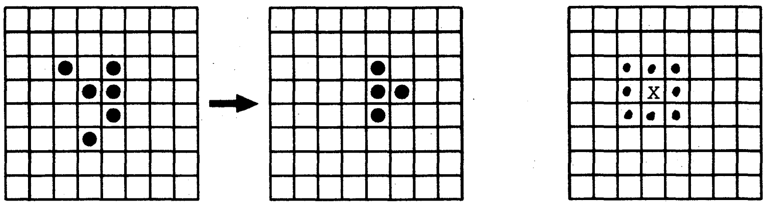


図1: ライフゲームの例　と　セルxの周りの8個のセル

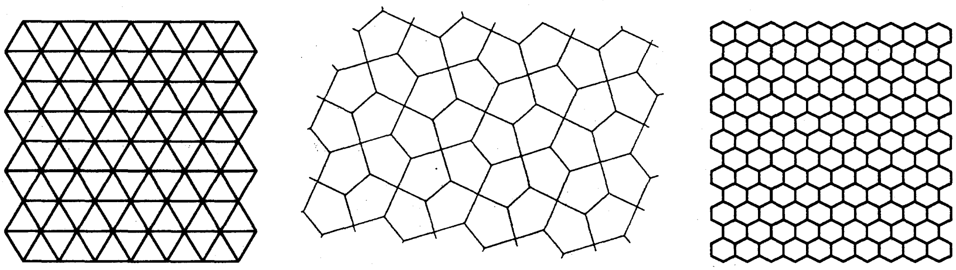
最初の状態を与えると、以降は上のルールに従って自動的に状態が次々に変化して行く。多くの場合、数十回から数百回程度状態を変化させると安定状態となり、状態が全く変化しないか又は2つの状態を交互にとることになる。しかし、どのような状態になって安定するか、また何回程度で安定するかを最初の状態とか途中の状態から推測することはほとんど不可能である。簡単なルールにもかかわらず複雑で奥の深いゲームである。

なお、石の生存と誕生に関する条件は、この他にもいろいろ考えられるが、実際に試してみるとこの他の条件では面白くないことがすぐに確認できる。つまり、他の条件では、急激に石の数が増えたり、逆に死滅したり、またすぐに安定状態になったりする。上の条件の元でだけ石の集団は実に複雑な動きをする。ライフゲームの詳細については[1]を参照して欲しい。

さてこのライフゲームは次のように4つの方法で変形、一般化することができる。

(1) 平面は4角形だけでなく、合同な3角形、5角形、6角形に分割することもできる(図2)。また分割の方法は各多角形に対して多種ある。この各分割に対して、いくつかの多角形に石を置き同様なルールでゲームができる。

(2) 平面が元のライフゲームのように正方形で分割されているとする。各セル $x$ に対して、$x$ の周りには8個のセルが接しているが、辺を共有して接しているものが4個、点だけで接しているものが4個ある。これらのセルの $x$ に対する影響は、辺で接するものと点で接するものとでは異なる、と考えることも自然で



三角形　　　　　五角形　　　　　六角形

図 2: 平面の 3 角形、5 角形、6 角形分割の例

ある。つまり、平面の多角形による分割が与えられたとき、各セル $x$ に対して、$x$ との接し方を $a(1), a(2), \ldots, a(k)$ とするとき、$a(i)$ の接し方をするセルにある石の数を $n_i$ で表わす。そして $k$ 個の変数からなる関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ と実数の集合 $I$ と $J$ を考え、石の生存と誕生に関するルールを次のように決める。

- セル $x$ に石があるときには、$f(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in I$ のときに限りセル $x$ には石がそのまま残り、その他のときには無くなる。
- セル $x$ に石がないときには、$f(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in J$ のときに限りセル $x$ に新しく石が生まれ、その他のときには無いままである。

元のライフゲームでは、

$a(1) :=$ 辺で接する　　　　$a(2) :=$点で接する

と 2 つの接し方があり、関数 $f$ および集合 $I, J$ は

$$f(x_1, x_2) := x_1 + x_2, \qquad I := \{2, 3\}, \qquad J := \{3\}$$

である。

一般には関数値は実数であるが、ここでは整数係数の 1 次関数だけを扱う。そして集合 $I, J$ も共に連続した整数の集合の場合だけを考え、このような制限の元で良いルールを捜す。制限を緩くしてもっと多種類のゲームを考察の対象に入れることは今後の問題である。

(3)　元のライフゲームでは各セルに対して、石がある、ないの 2 つの状態が考えられていたが、これを

ない、　　子供 ( 状態A)、　　成人＝親 ( 状態B)

の 3 つの状態に拡張する。もちろんこの時には、接し方の他に、セルに子供がいるか、成人がいるによって与える影響が違ってくる。一般的なルールは複雑になるので、詳細についてはこのゲームの例を扱う 4 節で述べる。

(4)　ここでは例を述べないが、次のような方向への拡張も考えられる。セル $x$ に対して、$x$ に接するセルだけでなく、たとえば $x$ からの距離が 2 のセルも $x$ に影響を与えるとすることもできる。一般には距離がある定数以下のセルすべてから影響が来ると想定することことになる。たとえば、平面を正 6 角形に分割したときは意味があると思われる。

このような 4 つの変形、拡張およびこれらの組み合わせによって定義されるライフゲームを茨大型ライフゲーム (Life Game of Ibadai type) と名付ける。2 節以降では、具体的な 3 つの分割に対して調べた結果を述べる。元のライフゲームとは動きの違う、つまり石の変化の状況がもっと複雑なものとか、変化の動き

がかなり違うものもあり新型ライフゲームと呼んでもよいものも見つかっている。最後にお願いがあります。茨大型ライフゲームには非常に多くの、ほとんど無数と言ってよほど多種類のゲームがあります。

興味ある人は、これはと思うものをぜひ調べて下さい。そして、もし運良くいい動き、変化をするゲームが見つかれば、そのルール、おもしろい例、発見者などをお知らせ下さい。こちらで登録、管理したいと思います。**計算スピードを上げるためのヒント**　一般に空白のセルが非常に多いので、ルール通りに各セル $x$ に対して $x$ の周りの石の数を数えるのではなく、石のあるセル $y$ に対して、$y$ の周りのセルに $y$ の影響分だけ数値を与え、すべての石に対してこの処理が終わってから生存、誕生を判別する方が計算スピードが断然早い。

## 2　重み付き正方形分割ライフゲーム

ここでは、元のライフゲームと同様に、平面を図3のように正方形で分割する。このとき、周囲のセルは、辺で接しているセルと、点で接しているセルという2種類が考えられる。それぞれの影響力を重みをつけることにより変える。ここで、

$a(1)$ :=辺で接する　　　　$a(2)$ :=点で接する

とおき、セル $x$ に関して、$a(1)$ の接し方をする石の数を $n_1$, $a(2)$ の接し方をする石の数を $n_2$ とする。

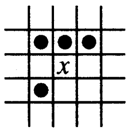


図 3: 接し方

例えば、図3では、$n_1 = 1, n_2 = 3$ である。また、点で接しているセルより、辺で接しているセルが大きい影響を与えると考える。ここでは、辺で接しているセルは、点で接しているセルの2倍の影響を与える。つまり、関数が、

$$f(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$$

と書ける場合を考える。

以下、興味ある動きをするルールについて述べる。

### 2.1　$f(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$　　$I := \{2, 3\}, J := \{4, 5\}$

このルールでは、固定物の種類が少ないので、最終的な形は2から3周期のパターンが多く存在する。そのため、振動した状態で安定状態となることが多い。

また、安定しないときもあり、このときにゆっくりと石の数は増えていく。

面白い例としては、図4の (9) のように (8) の固定物に (1) の移動物体にぶつけると、数十回の変化後、移動物体が現れ、(10) のようになる。しかし、(9) において、移動物体と固定物の距離を1つずらすと、数十回の変化後、移動物が逆方向に現れ、(11) のようになる。

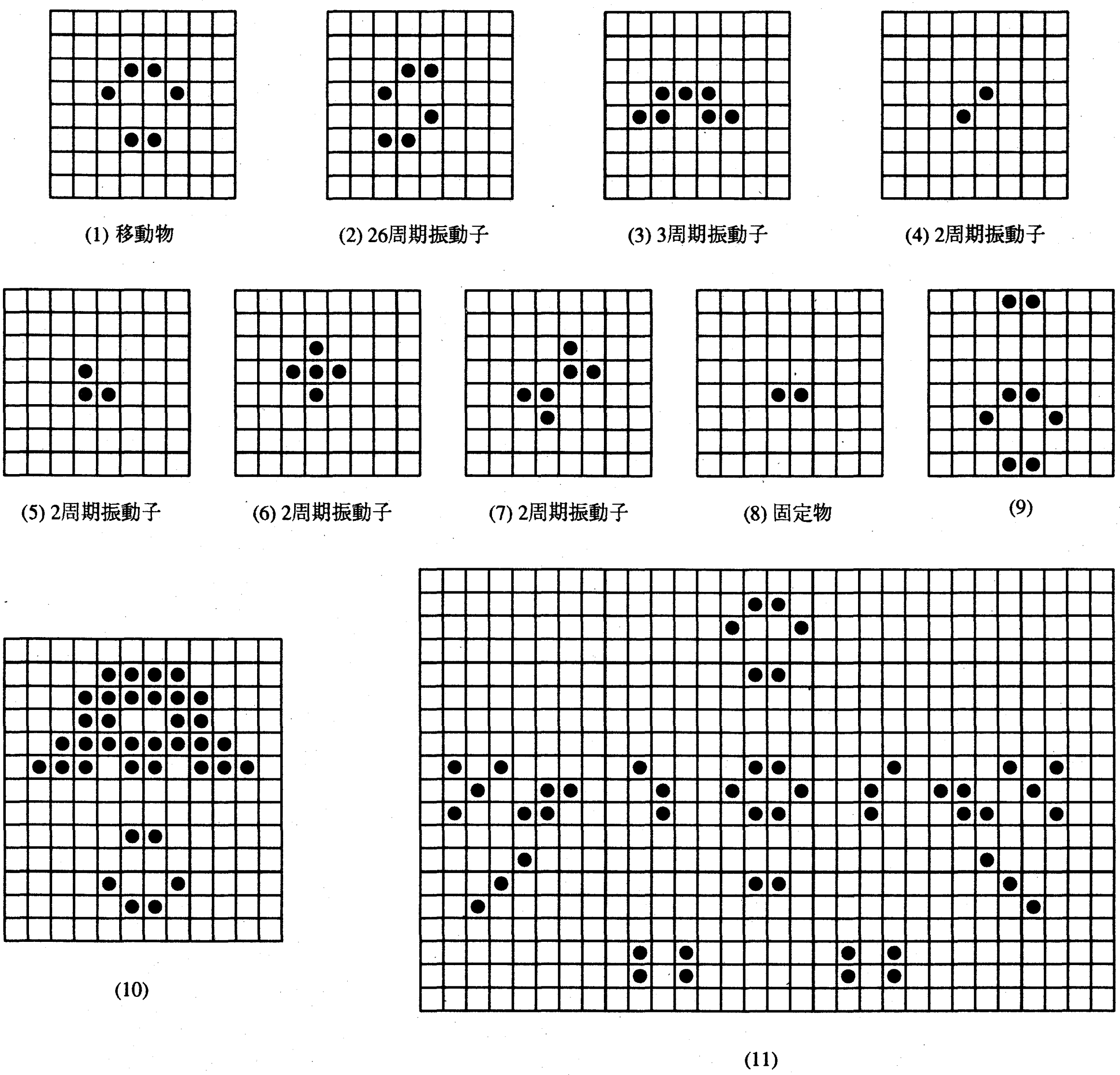
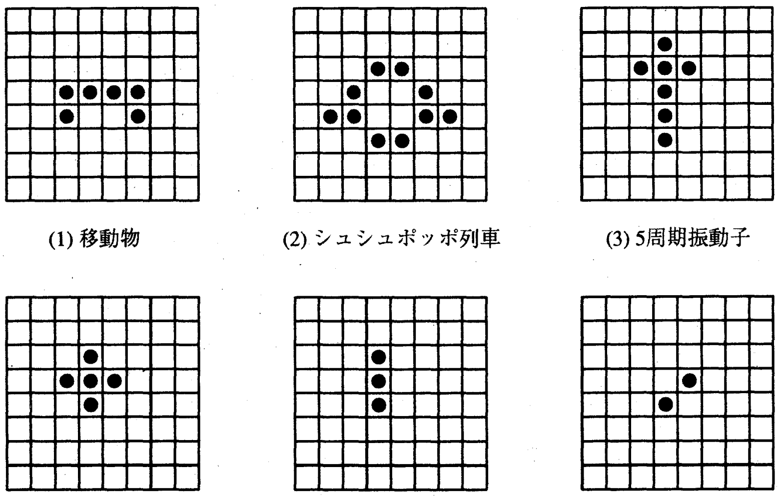

(1) 移動物
(2) 26周期振動子
(3) 3周期振動子
(4) 2周期振動子
(5) 2周期振動子
(6) 2周期振動子
(7) 2周期振動子
(8) 固定物
(9)
(10)
(11)

図 4: パターンの例

### 2.2 $f(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$ $\quad I := \{3, 4, 5, 6\}, J := \{4\}$



(1) 移動物 (2) シュシュポッポ列車 (3) 5周期振動子

(4) 3周期振動子 (5) 2周期振動子 (6) 2周期振動子

図 5: パターンの例

このルールでは、前のルールに比べ、生き残る変数の数が多いので、石の集まりの中心部は固定され、その周囲だけで展開が続く。そのため、大きい固定部分が存在することが特徴である。また、固定した部分の周囲の数個のみが振動するものもあり、固定物、振動子の種類は無数にある。しかし、元のライフゲームのように、『シュシュポッポ列車」が存在し、石の数が4のブロックを生成しながら移動していくので、このときは無限増殖していくものもある。

## 3 三角形分割ライフゲーム

ここでは、平面を図6のように合同な正三角形に分割した場合について考える。この場合には、各セルは、１２個のセルと隣接することになる。その接し方は、

- $a(1)$ :=もとのセルと辺で接する
- $a(2)$ :=もとのセルとは点で接するが、$a(1)$ のセルとは辺で接する
- $a(3)$ :=もとのセル、$a(1)$ のセルとも点で接する

の3通りである。

これから、この三角形分割ライフゲームで見つかった面白そうなルールと、それがどのような動きをするかについて、具体的に述べる。

まず、$a(1), a(2), a(3)$ を区別しない場合について述べる。つまり、

$$f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$$

とする。これは周りのセルからの影響が、接し方によらず、すべて等しくなるように設定したことになっている。

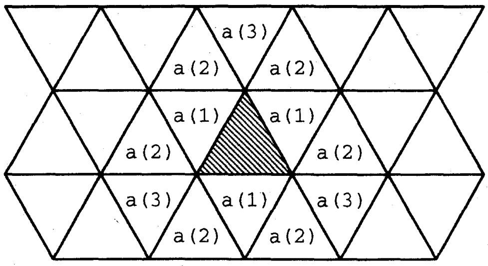



図 6: 三角形分割ライフゲームにおけるセルの接し方

### 3.1　$f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$ , $I := \{2, 3\}$ , $J := \{3\}$ のとき

このルールでは、１つ１つの石が激しく生死を繰り返し、荒れ狂いながら増殖する。とにかく、動きが激しいのが特徴である。収束はかなり遅い。というより、無限に増殖してしまうのかもしれない。よく現れる固定物は、固定物１である。振動子では、振動子１が最も多く現れる。また、移動物は発見されていない(ただし、増殖パターン１はシュシュポッポ列車になる可能性がある)。特徴的なパターンとしては、増殖パターン２がある。このパターンは単独で増殖し、最終的には４３０回の変化後、固定物１が９個と振動子１が１個になって安定する (図７参照)。

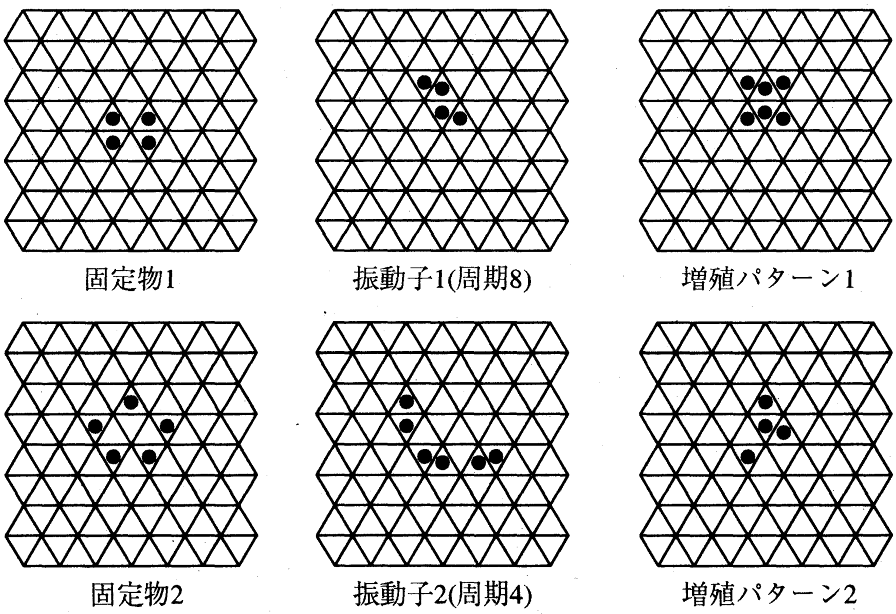



図 7: よく現れるパターン

### 3.2　$f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$ , $I := \{3, 4, 5\}$ , $J := \{4\}$ のとき

このルールでは、元のライフゲームと似た動きをする。しかし、初期状態として大きな集団を用いると、収束しない可能性がある。固定物の種類は非常に多く、その中で頻繁に現れるものは、固定物１や固定物２や固定物３などである。振動子としては、振動子１や振動子２がよく現れる。移動物については、まだ発見

されていない。特徴的なパターンとしては、増殖パターンがある。このパターンは、しばしばフィールドに現れる。周りにある石と干渉しなければ、単独で増殖し、最終的には935回の変化後、固定物1が2個、固定物2が1個、振動子1が1個となって安定する（図8参照)。

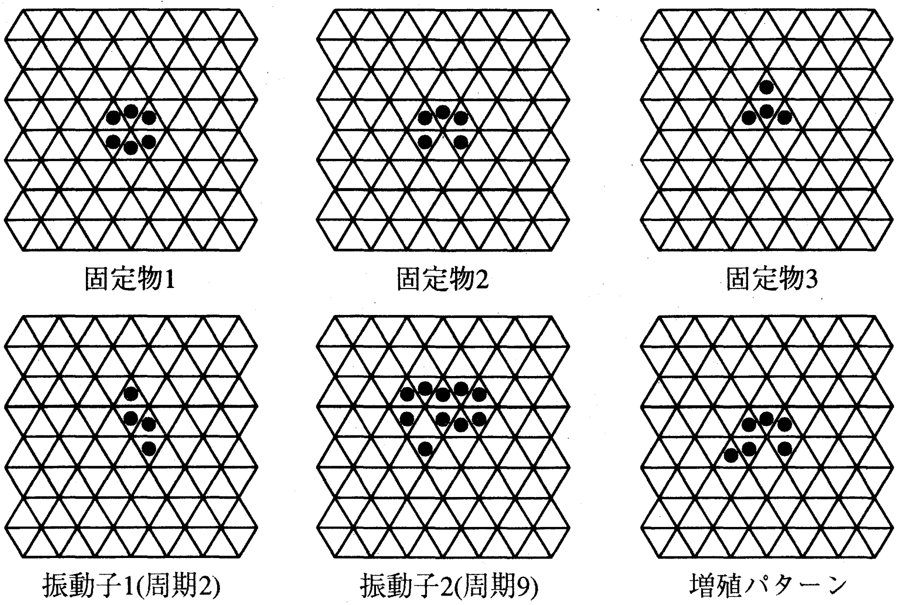



図 8: よく発生するパターン

つぎに、接し方 $a(1), a(2), a(3)$ によって、影響力が異なる場合を考える。ここでは、関数 $f$ を次のように設定した。

$$f(x_1, x_2, x_3) := 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

もちろん、この係数が唯一のものではなく、その決め方は無数にある。これ以外の関数については、これからの課題である。以下、この設定で見つかった面白そうなルールを2つ紹介する。

### 3.3 $f(x_1, x_2, x_3) := 3x_1 + 2x_2 + x_3$ , $I := \{4, 5, 6, 7\}$ , $J := \{4\}$ のとき

このゲームは、とても興味深い動きをする特別な図形がある。ランダムな初期状態は、ほとんどすぐに小さな固定物になって安定する。活動的な部分があっても、やがてはいくつかの固定物になってしまうので、一般的には、収束はとても速い。ところが1つだけ例外がある。それは増殖パターンである。このパターンは、それ自身が単独で無限増殖することができる。その様子は結晶の成長を見ているようである。このように無限増殖するパターンは、元のライフゲームでも、また、この他の茨大型ライフゲームでも見つかっていない。また、このライフゲームでも、このパターンの系列以外には見つかっていない。他には、3ピクセルの小さなパターンが移動物となっている点も興味深い（図9参照)。

### 3.4 $f(x_1, x_2, x_3) := 3x_1 + 2x_2 + x_3$ , $I := \{4, 5, 6, 7, 8\}$ , $J := \{7, 8\}$ のとき

このゲームもまた、面白い動きを観察することができる。ランダムな初期状態はすぐに収束してゆき、やがて固定物1が多く発生する。また、その他の活動的な部分のほとんどから移動物1が生まれる。移動物1

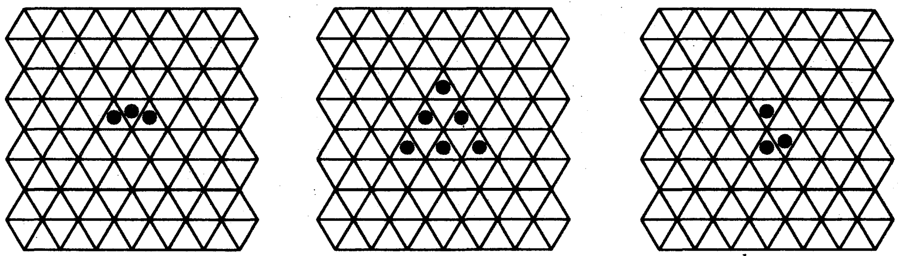



図 9: よく発生するパターン

を生んだ活動的な部分は、急速に活力を失い、消滅するか固定物になる。その結果、かなり早い時刻で固定物１と移動物１が散りばめられた安定な世界となってしまう（たまに、振動子１やシュシュポッポ列車も発生する)。この後の変化は、移動物（シュシュポッポ列車を含む）と他の物体との衝突によって引き起こされるしかないが、その衝突によって新たに活動的な部分が生まれることは稀である（図１０参照)。

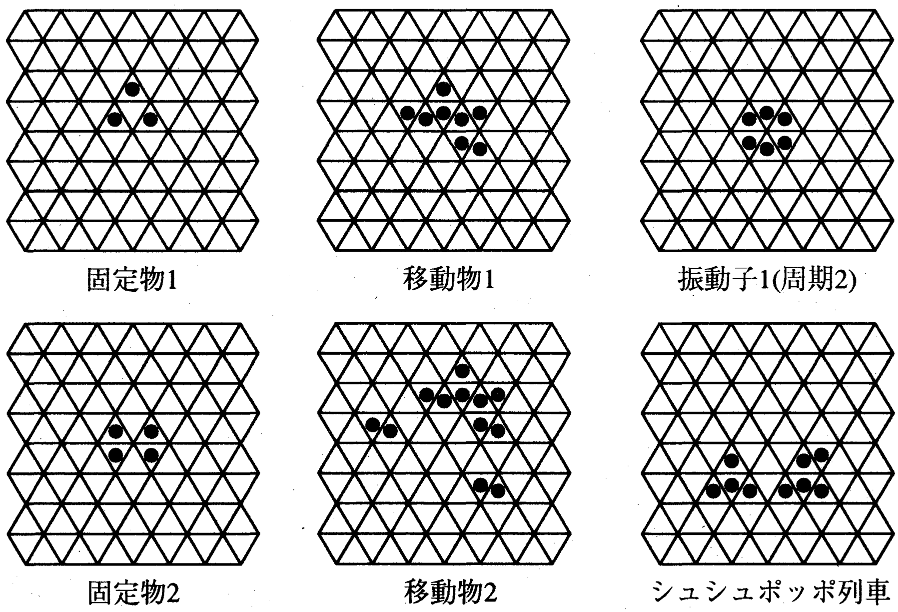



図 10: よく発生するパターン

# 4 正六角形分割による三状態ライフゲーム

## 4.1 三状態のライフゲームにした理由

まず、正六角形分割による二状態ライフゲーム（石がある、ない）について述べる。セルの接し方は一通りだから、$f(x_1) = x_1$となる。また石の集団が移動したり無限に増加したりする可能性をもたせるためには、$I \ni 2$としなければならない。また石があるとき、生存条件をもっとも厳しくするためには、$J := \{a\}$

とすればよい。しかし、$I=\{2\}, J=\{2\}$ のもとで、多くの場合は石の集団無限に増殖を続け動きも鈍い、よって面白いものはない。

以下３つの状態、「ない」、「子供」、「大人＝親」、のある場合について述べる。このときには一般に次のようにルールが定められる。接する状態を $a_1, a_2 \cdots a_i$ とし、セル $x$ に対し、$x$ と $a_i$ の状態で接する子供の数を $n_i$、大人の数を $m_i$ とする。もっとも一般には３つの $2n$ 変数の関数 $f(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_k, y_k)$、$g(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_k, y_k)$、$h(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_k, y_k)$ と４つの実数集合、$I, J, K, L$, を考え、

- $x$ に何もないとき :もし $f(n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots n_k, m_k) \in I$ なら子供が生まれ、その他のときはないま
- $x$ に子供がいるとき、もし $g(n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots n_k, m_k) \in J$ なら子供のまま、$g(n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots n_k, m_k) \in K$ なら親になり, その他のときは死滅する。
- $x$ に大人がいるとき、もし $h(n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots n_k, m_k) \in L$ なら大人のまま、その他では死滅する。

六角形分割では接し方が一通りなので上の３つの関数が $f(x_1, y_1)$、$g(x_1, y_1)$、$h(x_1, y_1)$ となる。また３つの関数は整数係数で、集合 $I, J, K, L$ は連続な整数の集合の場合だけを考える。面白い動きをするものを次に述べる。

● 状態1:子供　　● 状態2:大人(親)

図 11:

### 4.2 ルール１

- $f(x_1, y_1) := x_1 + 2y_1$, 　$I := \{4\}$
- $g(x_1, y_1) := f(x_1, y_1)$, 　$J := \{\}, K := \{4, 5, 6, 7\}$
- $h(x_1, y_1) := f(x_1, y_1)$, 　$L := \{4, 5, 6, 7\}$

このルールは他のものに比較して収束がやや速く収束し終った状態ではほとんどの場合何も残らない。しかし非常に長い周期で安定しているものや移動しているものが存在している。（図 12)

### 4.3 ルール２

- $f(x_1, y_1) := 2y_1$, 　$I := \{4\}$
- $g(x_1, y_1) := x_1 + 2y_1$, 　$J := \{3, 4\}, K := \{5, 6, 7\}$
- $h(x_1, y_1) := g(x_1, y_1)$, 　$L := \{4, 5, 6, 7\}$

このルールは収束がやや遅めであり、固定物が存在するので収束した状態はたいてい何か残っている。ある程度集団が大きいと長生きする場合が多く、親の動きが少ないので面白い動きをする。（図 13)

## 参考文献

[1] W. パウンドストーン著 （有澤　誠 訳） 「ライフゲイムの宇宙」、日本評論社 (1990)

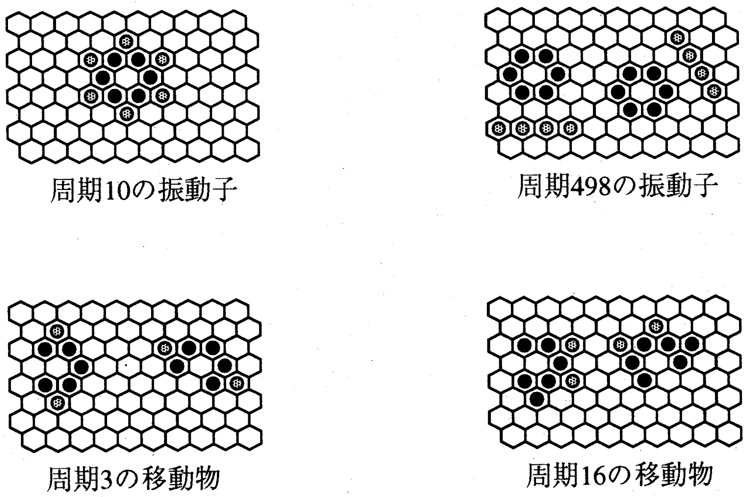



図 12: ルール 1 における代表的な図形

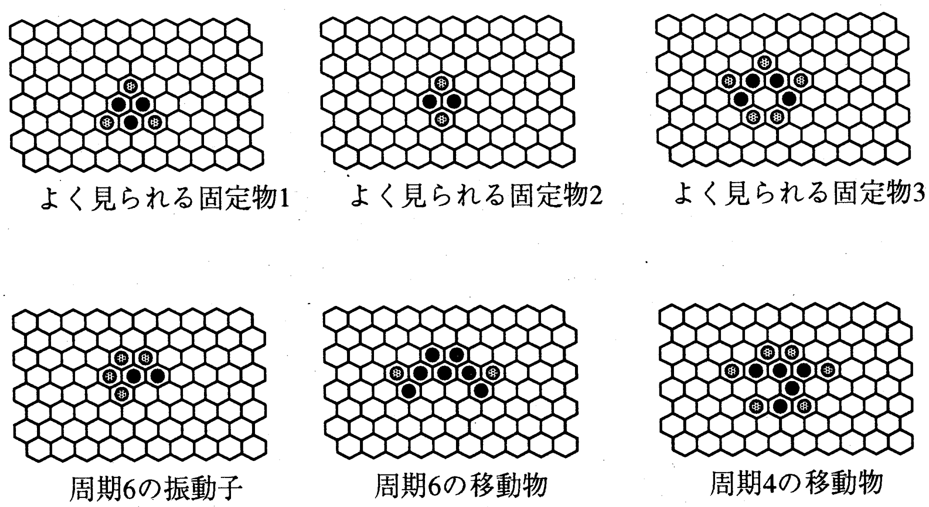



図 13: ルール 2 における代表的な図形