数理解析研究所講究録
第858巻 1994年 57-66



# 位相力学系の基本集合と附随するC*環の性質

東京都立大 理 富山 淳 (Jun Tomiyama)

§0. $\Sigma=(X,\sigma)$ をコンパクト空間Xとその上のhomeomorphism $\sigma$ よりなる位相力学系とし、$A(\Sigma)$ を $\Sigma$ に附随する位相変換群C*環とする。即ち、$A(\Sigma)$ は $\sigma$ に対応する連続関数環 $C(X)$ 上の同型対応 $\alpha$ ( $\alpha(f)(x)=f(\sigma^{-1}x)$ ) によるC*クロス積 $C(X)\times_{\alpha}\mathbb{Z}$ ( $=C(X)\times_{\alpha r}\mathbb{Z}$, 縮約クロス積, ここで $\mathbb{Z}$ は整数群) である。エルゴード論とvon Neumann環論との間の大規模な交流を念頭におき、位相力学系論とC*環論との関連を考えるのが本稿の主題であるが、そのすべては議論があまりに広汎にわたるのでその焦点を位相力学系の基本集合のC*環的側面にしぼって行なうことにする。この主題に対する我々の立場は次の様なものである。

(1) すべての基本結果は作用素環－力学系の間の同値関係の形でのべられるべきである。例. $\Sigma$ minimal $\rightleftarrows$ $A(\Sigma)$ 単純.

(2) 古典的な力学系(無理数回転 etc.)に反する様な作用素環的仮定はおかない(作用素環論的立場との違い).

(3) 可分性は一般には仮定しない。

誤解のない様につけ加えると、最後の分は通常の $C^*$ 環論においても特に"とり扱う $C^*$ 環はすべて可分とする"というような制限はつけていないという程の意味である。

$\Sigma_\theta = (T, \sigma_\theta)$ を無理数回転とし、無理数回転 $C^*$ 環 $A_\theta$ の構造論をこの意味で眺めてみよう。

1° $A_\theta$ が単純なのは $\Sigma_\theta$ の極小性による（前述）

2° $A_\theta$ の trace の一意性 $\rightleftarrows$ $\Sigma_\theta$ がルベック測度によって一意的にエルゴード的なことによる。

3° $A_\theta$ が AF－$C^*$ 環に埋めこめることは力学系論としては $X(\sigma) = T$（実際は $C(\sigma) = X(\sigma) = T$）となることによる（'83 年の Pimsner による結果）（$C(\sigma)$, $X(\sigma)$ は §1 参）

しかし最近の発展による $A_\theta$ の circle algebra としての構造などは力学系として何が原因になっているのか見当もついていない。したがって上のような意味の立場では力学系 $\Sigma_\theta$ もまだ解明しつくされていないと言える。

§1 主結果．まず力学系 $\Sigma$ について、周期点の集合，recurrent 点の集合，非遊走集合，chain recurrent 点の集合をそれぞれ $Per(\sigma)$, $C(\sigma)$, $\Omega(\sigma)$, $X(\sigma)$ とかくことにする。考えている空間 $X$ は今論ここでは距離空間の場合である。またここで

$x$ が chain recurrent なとは任意の $\delta>0$ について cyclic な $\delta$－疑軌道が存在することをいう．これらの集合が $C^*$ 環 $A(\Sigma)$ に対して果す意味は（現在判明している分は）次のようなものである．しかしその前に $C^*$ 環 $A$ のクラス分けについてのべておくと，$A$ の既約表現の像がコンパクト作用素のみからなるとき $A$ を liminal（または CCR），またそのつみ重ねを postliminal（または GCR）環という．$A$ が可分なときには後者は $A$ の任意の既約表現の像が常にコンパクト作用素環を含むことと同値である．任意の $C^*$ 環 $A$ には常に最大の postliminal なイデアル $K$ が存在してその商 $C^*$ 環 $A/K$ は non-zero な postliminal なイデヤルをもたない．このような $C^*$ 環を antiliminal（または NGCR）な $C^*$ 環という．Postliminal 環はしばしば I 型の $C^*$ 環と呼ばれる．

定理A．次のことが成り立つ

(1) $Per(\sigma)=X$ となるのは $A(\Sigma)$ の既約表現がすべて有限次元なことと同値である（可分性の仮定なしに成立）

(2) $A(\Sigma)$ が I 型であることと，$Per(\sigma)=C(\sigma)$ とは同値である．

(3) $A(\Sigma)$ が antiliminal なことと，集合 $C(\sigma)\setminus Per(\sigma)$ が $X$ で稠密なこととは同値である．

(4) $A(\Sigma)$ が AF $C^*$ 環に埋めこめることと，$X(\sigma)=X$ であ

ることは同値である。

ここで(2), (3)は青木－富山による最近の結果[1]による。(4)は前述のPimsnerの結果([5])である。これらの主張の特徴は先ずどの場合も（整数群$\mathbb{Z}$の作用と考えている）homeomorphism $\sigma$, と言うより力学系$\Sigma$に対して何の条件も課していないということである。$A(\Sigma)$がいつI型になるかについてはGlimm, Zeller-Meierの先駆的な仕事以外にも、一般的な枠組$A \rtimes G$, $A \rtimes_{\alpha r} G$の中で作用素環論では多々論じられてきたが、力学系の人達からは強いて言えば"無縁"なものが多かった。しかしその中でも次の主張はここに引用すべきであろう。

(2)′ $A(\Sigma)$がI型であることと軌道空間$X/\mathbb{Z}$が$T_0$空間であることとは同値である。

これは$C^*$環論の枠組で証明されていた結果であるが宍倉氏により条件 $Per(\sigma) = C(\sigma)$ との同値性という形でも解明されている（個人的な通信）。ちなみにこの条件をみたし更に周期点が有限個という力学系はMorse-Smale系と呼ばれ良く研究されている。

$A(\Sigma)$のAF環への埋めこみについてはPimsner-Voiculescuによる無理数回転環$A_\theta$の埋めこみの後にも種々論じられているが(4)でのPimsnerの埋めこみは相当粗いもので

ある。最近の Herman－Putnam－Skau（[2]）やその前の Putnam などの研究により $A(\Sigma)$ と AF 環との関係は力学系論から見ても益々興味深いものがあるので、$A_\theta$ の場合（$C(\sigma)=X$ のとき）も含めて各力学系の特性に応じた canonical な AF 環への埋め込みとは何かという問題は重要な課題であると思う。

非遊走点の集合である $\Omega(\sigma)$ については $C(\sigma)$ および $X(\sigma)$ との関係も含めて何も知られていない。Anosov diffeomorphism の系について $\Omega(\sigma)=X$ かという問題が長年の課題になっているという状況を考え合せるまでもなく、$\Omega(\sigma)$ の意味の $C^*$ 環的側面の解明は魅力のあるものである。

(3) をみたす力学系の例としては無理数回転系や Bernoulli shift のほかに、3次元の discrete Heisenberg 群 $H^3$ に附随した2次元トーラス $T^2$ 上の力学系を挙げておきたい。これは結論的には2次の行列 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ によってひき起される力学系でこの形から見てもわかるように無理数回転と有理数回転の混合になっている。したがってここでは $C(\sigma)\setminus Per(\sigma)$ が $T^2$ で稠密であるばかりではなく、周期点の集合 $Per(\sigma)$ も有理数回転の影響で $Per(\sigma)$ も稠密な集合になっており、その結果として群 $C^*$ 環 $C^*(H^3)=C(T^2)\times_\alpha Z$ は有限次元の既約表現も十分沢山もつような antiliminal $C^*$ 環になっている。

§2 関連する事柄。 前述の定理Aの(2),(3)の結果は実はもっと一般的に$A(\Sigma)$の最大のpostliminalなイデアル$K$を定める次の結果の系として導びかれる。そのために準備として、$X$の点$x$について$C(X)$上のpoint evaluationによるpure stateを$\mu_x$とし、その$A(\Sigma)$上へのpure state拡大を$\varphi_x$とする。$x$が非周期点であればこのような拡大は一意であることが良く知られている。$\varphi_x$によるGNS表現のkernelを$P(x)$と書くことにする。今$x$の軌道$O(x)$の閉包$\overline{O(x)}$で$0$となる連続関数全体を$k(\overline{O(x)})$とすると、$P(x)$は$k(\overline{O(x)})$から生成された$A(\Sigma)$のイデアルである([3]参)。次が成り立つ。

定理B. $K = \bigcap_{x \in C(\sigma)\setminus Per(\sigma)} P(x)$

このことから(2)は自明であり、(3)は$C(\sigma)\setminus Per(\sigma)$が$X$で稠密なことと$K=0$が同値なことによる。

$A(\Sigma)$のI型性はその既約表現$\tilde{\pi} = \pi \times u$ ($\pi = \tilde{\pi}|C(X)$)の像$\tilde{\pi}(A(\Sigma))$がいつコンパクト作用素環を含むかに関係するが、それを解析する手段として$\tilde{\pi}$によってひき起された力学系を次の様に考える。$\pi$のkernel $\pi^{-1}(0)$は先ず$C(X)$の不変イデアルであるから、$X$の閉不変集合$X_\pi$によって$\pi^{-1}(0) = k(X_\pi)$と書ける。$\sigma_\pi = \sigma|X_\pi$とおく。一方$\pi(C(X))$のGelfand表現を

$C(X'_\pi)$ とし covariant 表現 $\{\pi, u, H\}$ によって $X'_\pi$ 上にひき起された homeomorphism を $\sigma'_\pi$ と記すと力学系 $\Sigma'_\pi = (X'_\pi, \sigma'_\pi)$ は同型対応

$$C(X_\pi) = C(X)/_{k(X_\pi)} \cong C(X'_\pi)$$

を通して自然に力学系 $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$ と同一視出来る。

Fact 1. $\tilde{\pi} = \pi \times u$ を既約表現とする。このとき $\tilde{\pi}$ が有限次元なことと $X_\pi$ が有限集合であることとは同値である。

このことから周期点から前述のようにして作ったGNS表現 $\tilde{\pi}_{\varphi_x} = \pi_{\varphi_x} \times u$ は有限次元なこと、また有限次元既約表現はすべてこの形をしていることがわかり、このことを利用して定理Aの(1)の主張が得られる(可分性の仮定はいらない)。

既約表現に対しては induced 力学系 $\Sigma_\pi = (X_\pi, \sigma_\pi)$ は一般に Topologically Transitive (任意の開集合 $U, V$ についてある整数 $n$ により $\sigma_\pi^n(U) \cap V \neq \phi$ となる) になり、$X$ が距離空間の時にはしたがって $X_\pi$ には稠密な軌道をもつ点が存在する。この点を $x_\pi$ とすると

Fact 2. $\tilde{\pi}(A(\Sigma)) \supset C(H) \rightleftarrows x_\pi \notin C(\sigma) \setminus Per(\sigma)$

このことの証明でも常に問題となるのはコンパクト作用素環 $C(H)$ がいつイデアルとして $\pi(C(X))$ と nonzero な共通分

をもつかということである。一般にC*クロス積 $A\times_{\alpha} G$, $A\times_{\alpha r} G$（Gはとりあえずdiscrete群）のイデアルの構造を解明するにあたって一番厄介なのは $I\cap A=\{0\}$ となるようなイデアル $I$ の存在であるが、$A(\Sigma)$ においては非常に一般な力学系においてこのような pathology が起らないことが知られている。すなわち次が成り立つ。（[3] 参照）

定理C. $A(\Sigma)$ について次のことは同値である.

(1) $\Sigma$ は topologically free な力学系,

(2) $A(\Sigma)$ の閉イデアル $I$ について

$$I\neq\{0\} \rightleftarrows I\cap C(X)\neq\{0\}$$

(3) $C(X)$ は $A(\Sigma)$ の極大可換C*部分環である.

ここで $\Sigma$ が Topologically free とは非周期点の集合が $X$ で稠密なときをいう。定理Aの(3)の例の力学系はすべてこの型であるのは勿論であるが、manifold 上で考えられている通常の力学系は大体 $Per(\sigma)$ が高々可算集合なのでこの類になっている。しかし有限次元の既約表現という自明な場合を除くと前述の Fact 2 を得るために上記定理をあてはめるのにはもう1ステップ次の結果が必要である。

Fact 3. $\tilde{\pi}=\pi\times u$ を $A(\Sigma)$ の既約表現とすると、$\tilde{\pi}$ が無限次元のとき $\tilde{\pi}(A(\Sigma))$ は $A(\Sigma_\pi)$ と同型である.

最後に、力学系$\Sigma$と$C^*$環$A(\Sigma)$との相関関係において最も大きな問題となるのはvon Neumann環(factor)の場合のKrieger の定理にあたる$A(\Sigma)$の同型問題

$$A(\Sigma_1) \cong A(\Sigma_2) \rightleftarrows \Sigma_1 \text{と} \Sigma_2 \text{の関係は何か？}$$

であるが現在の所はGiordano－Putnam－Skauによるカントル集合上の極小力学系についての結果(完全条件、しかし現時点ではannounceのみ)があるのみである。位相的な軌道同型の概念がエルゴード論でのそれに対応するものになるだろうとは予想されている。しかしまだ道ははるかに遠い！

## 文　献


1. N. Aoki－J. Tomiyama, Characterizations of topological dynamical systems whose transformation group $C^*$-algebras are antiliminal and of type 1 (to appear in Ergodic Theory and Dynamical systems)
2. R. Herman－I. Putnam－C. Skau, Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics, International Math. J., **3** (1992), 827－864.
3. J. Tomiyama, The interplay between topological dynamics and theory of $C^*$-algebras, Lecture note 2, Seoul 1992.

4. ———, Invitation to $C^*$-algebras and topological dynamics, World Sci. Ltd., Singapore 1987.

5. M. Pimsner, Embedding some transformation group $C^*$-algebras into AF-algebras, Ergodic Theory and Dynamical Sys., 3 (1983), 613-626.