

不動点定理と凸不等式

東工大理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

線形問題から非線形問題へうつる 1 つの過程において、凸関数に関する問題があるが、ここでいう凸不等式とは、 m 個の凸関数の不等式の問題をいう。線形不等式に関する定理は線形計画法などの線形最適化問題で有用であるが、凸不等式に関する定理はやはり非線形解析学で有用な道具となっている。Fan [5] は凸不等式に関するつぎの定理を証明した。

定理 A (Fan) X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし、 f_1, f_2, \dots, f_m を X 上で定義され、実数に値をもつ下半連続で凸な m 個の関数とする。このとき、つぎの条件 (1) と (2) は同値である。

(1) m 個の不等式のシステム

$$f_i(x) \leq c \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

は解をもつ。

(2) $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) \leq c$$

となる $y \in X$ が存在する。

この定理は minimax 定理, または Fan-Browder の不動点定理を用いて証明されるが, それはいろいろな存在定理を証明する上でも重要なものとなっている。

一方, 1975 年に Baillon [1] によって最初の非線形エルゴード定理が証明された。

定理 B (Baillon) C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする。このとき, T の不動点の集合 $F(T)$ が空でないならば, 任意の $x \in C$ に対して

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i x$$

は $F(T)$ の元に弱収束する。

この定理は, 集合

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \text{co} \{ T^n x : n \geq m \} \cap F(T)$$

が 1 点からなるという事実より証明されるが, この事実はまた種々の収束定理を証明する上でも重要なものとなっている。

ここでは, 非拡大写像の不動点定理とこの種の収束定理をいくつか証明するとともに, 凸不等式に関する Fan の定理の

有用性, 凸不等式の解と収束定理との関わりなどを調べてみたい。

§1 凸不等式の解への近似法

Fan の定理 (定理 A) において

$$C_i = \{x \in X : f_i(x) \leq c\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

とおくと, C_i は閉凸集合となる。また, n 個の不等式のシステム $f_i(x) \leq c$ ($i=1, 2, \dots, n$) が解をもつということは

$$\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$$

ということに他ならない。Fan の定理は $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ であるための必要十分条件を与えたものである。

それでは, $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ であるときの $\bigcap_{i=1}^n C_i$ の元を求める近似法はないのだろうか。Crombez [4] は Hilbert 空間において, 次のような収束定理を証明した。

定理 C (Crombez) H を Hilbert 空間とし, C_i ($i=1, 2, \dots, n$) を $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ となる H の閉凸集合の族とする。 P_i を H から C_i への metric projection とし,

$$T_i = (1 - \alpha_i)I + \alpha_i P_i, \quad 0 < \alpha_i < 2$$

とする。また

$$T = \alpha_0 I + \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i,$$

$$\alpha_i > 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

とする。このとき、任意の元 $x \in H$ に対して、 $\{T^n x\}$ は $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ の元に弱収束する。

この定理は Hilbert 空間における $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ の元を求める近似法である。この定理は最近、北原-高橋 [9] により、非線形エルゴード定理を証明する方法によって Banach 空間の場合にまで拡張されたので、この節ではそれを紹介しておこう。

E を Banach 空間とし、 C を E の空でない閉凸集合とする。 C から E への写像 T は

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

を満たすならば非拡大写像 (nonexpansive) であるといわれる。写像 T に対して、 $F(T)$ で T の不動点全体の集合を、 $R(T)$ で T の値域を表すことにする。 C から E への写像 T は、任意の元 $x \in C$ に対して

$$\|T^n x - T^{n+1} x\| \rightarrow 0$$

を満たすなら asymptotically regular であるといわれる。 D を C の部分集合とし、 P を C から D への写像とする。 P が、 $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して、 $Px + t(x - Px) \in C$ であるとき

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

を満たすなら sunny であるといわれる。 $P^2 = P$ を満たす C から C への写像は retraction といわれる。 D を C の部分集合とする。このとき、 C から D への sunny nonexpansive retraction が

存在するなら, D は sunny nonexpansive retract と呼ばれる.

Hilbert空間の空でない閉凸集合が sunny nonexpansive retract であることはよく知られた事実である. しかしながら, Banach空間ではこの事実は一般にはいえない.

E を Banach 空間とし

$$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

とする. このとき, $x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \dots \dots \quad (*)$$

を考える. この極限 (*) が, $x, y \in U$ に対して常に存在するとき, E のノルムは Gateaux 微分可能であるといわれる. それはまた, $x \in U$ を固定したとき, y に関して一様に収束するならば, Fréchet 微分可能であるといわれる. この極限 (*) が $(x, y) \in U \times U$ に対して一様に収束するならば, E のノルムは一様 Fréchet 微分可能であるといわれる.

Bruck [3] (または平野 [6], Lau-高橋 [10] を見よ) は次の定理を証明した.

定理 D (Bruck) E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸集合とし, T を C から C への nonexpansive 写像とする. このとき

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \{T^n x; n \geq m\} \cap F(T)$$

は高々1点からなる。

この定理を用いると、次の定理が証明できる。

定理 E E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とする。 C を E の空でない閉凸集合とし、 T を $F(T) \neq \emptyset$ となる C から C への asymptotically regular nonexpansive 写像とする。このとき、任意の元 $x \in C$ に対して、 $\{T^m x\}$ は $F(T)$ の元に弱収束する。

証明 $x \in C$ とし、 $y \in F(T)$ とする。また、 B を中心 y 、半径 $\|x - y\|$ の閉球とする。このとき、集合 $K = C \cap B$ は有界であり、 T のもとで不変でもある。そこで [2] より $I - T$ は K 上で demiclosed である。すなわち、 $x_n \rightarrow z$ (弱収束)、 $x_n - Tx_n \rightarrow 0$ (強収束) ならば、 $(I - T)z = 0$ である。 $F(T) \neq \emptyset$ より、 $\{T^m x\}$ は有界である。 E は一様凸なので、 $\{T^m x\}$ の部分点列 $\{T^{m_i} x\}$ が存在し、それが K の元 z に弱収束する。また T は asymptotically regular なので、 $(I - T)T^{m_i} x \rightarrow 0$ でもある。ここで T の demiclosed 性を用いると、 $z = Tz$ を得る。定理 D より

$$\{z\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \{T^m x : m \geq m\} \cap F(T)$$

なので、 $\{T^m x\}$ は z に弱収束する。

Hilbert 空間の場合に Crombez [4] が用いた idea を使うと次の定理が証明できる。

定理F (北原-高橋) E を一様凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $S_i (i=1, 2, \dots, m)$ を C 上の nonexpansive 写像とし, S を

$$S = \beta_0 I + \sum_{i=1}^m \beta_i S_i, \quad 0 < \beta_i < 1 \quad (i=0, 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{i=0}^m \beta_i = 1$$

によって定義される C 上の nonexpansive 写像とする. このとき, $\bigcap_{i=1}^m F(S_i) \neq \emptyset$ であるならば, S は asymptotically regular である.

証明 $x \in C$ とし, $u \in F(S)$ とする. $x \neq u$ としても一般性を失わないので $x = u$ と仮定する.

$$x_m = S^m x \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

と置くと, S は nonexpansive なのので, $\{\|x_m - u\|\}$ は非増加である. また,

$$x_{m+1} - u = S x_m - u$$

$$= \beta_0 (x_m - u) + (1 - \beta_0) \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{1 - \beta_0} (S_i x_m - u)$$

から, $z_m = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{1 - \beta_0} (S_i x_m - u)$ と置くと

$$x_{m+1} - u = \beta_0 (x_m - u) + (1 - \beta_0) z_m$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
\|z_m\| &= \left\| \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{1-\beta_0} (S_i x_m - u) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{1-\beta_0} \|S_i x_m - u\| \\
&\leq \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i}{1-\beta_0} \|x_m - u\| \\
&= \|x_m - u\|
\end{aligned}$$

となり, $\|z_m\| \leq \|x_m - u\|$ を得る. 今や $\{x_m - u - z_m\}$ が 0 に収束する部分点列をもつことを証明しよう. もしそうでないとする, ある $\varepsilon > 0$ とある自然数 m_0 が存在し, すべての $m \geq m_0$ に対し, $\|x_m - u - z_m\| \geq \varepsilon$ となる. E が一様凸であることを使うと,

$$\begin{aligned}
\|x_{m+1} - u\| &= \|\beta_0(x_m - u) + (1-\beta_0)z_m\| \\
&\leq \|x_m - u\| \left\{ 1 - 2\beta_0(1-\beta_0)\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|x - u\|}\right) \right\} \\
&\quad \vdots \\
&\leq \|x_{m_0} - u\| \left\{ 1 - 2\beta_0(1-\beta_0)\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|x - u\|}\right) \right\}^{m+1-m_0}
\end{aligned}$$

を得る. ここで $0 < \beta_0 < 1$ であるので,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - u\| = 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|z_m\|$$

を得る. 故に $\{x_m - u - z_m\}$ は 0 に収束する. これは矛盾である. そこである部分列 $\{x_{m_i} - u - z_{m_i}\}$ は 0 に収束する.

$\{\|x_m - x_{m+1}\|\}$ は非増加なので, そして

$$\begin{aligned} x_m - x_{m+1} &= x_m - \{u + \beta_0(x_m - u) + (1 - \beta_0)z_m\} \\ &= (1 - \beta_0)(x_m - u - z_m) \end{aligned}$$

なので, $x_m - x_{m+1}$ は 0 に収束する.

$$x_m - x_{m+1} = S^m x - S^{m+1} x$$

であることから, S は asymptotically regular であることがわかる.

次の補助定理は定理 6 を証明する上で本質的である.

補助定理 E を狭義凸な Banach 空間とし, $C \subseteq E$ の閉凸集合とする. P を C から D の上への sunny nonexpansive retraction とし, $x \in C$ とする. このとき, ある $y \in D$ に対し, $\|Px - y\| = \|x - y\|$ ならば $Px = x$ である.

証明 $x \neq y$ を仮定するかも知れない. P は sunny であり, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px \in C$ であるので

$$P\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px\right) = P\left(Px + \frac{1}{2}(x - Px)\right) = Px$$

である. そこの

$$\begin{aligned} \|Px - y\| &= \left\| P\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px\right) - Py \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px - y \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(Px - y) \right\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x-y\| + \frac{1}{2} \|Px-y\|$$

$$\leq \|x-y\|$$

を得る. そして $\|Px-y\| = \left\| \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(Px-y) \right\| = \|x-y\|$ を得る. 一方 $Px \neq x$ を仮定すると, $Px-y \neq x-y$ である. E は狭義凸であり, $\|Px-y\| = \|x-y\|$ であるので,

$$\left\| \frac{1}{2}(Px-y) + \frac{1}{2}(x-y) \right\| < \|x-y\|$$

を得る. これは矛盾である. よって, $Px=x$ である.

定理 G (北原-高橋) E を狭義凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $C_1, C_2, \dots, C_n \in C$ の sunny nonexpansive retracts とし, $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$ とする. T を

$$T = \sum_{i=1}^n \alpha_i T_i, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

で定義される C 上の作用素 (ただし,

$$T_i = (1-\lambda_i)I + \lambda_i P_i, \quad 0 < \lambda_i < 1,$$

P_i は C から C_i の上への sunny nonexpansive retraction

である) とするとき,

$$F(T) = \bigcap_{i=1}^n C_i$$

である.

今や Banach 空間において目的の $\bigcap_{i=1}^m C_i$ の元を求める近似法が証明できる。

定理 H (北原-高橋) E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする。

C_1, C_2, \dots, C_n を C の sunny nonexpansive retract とし, $\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないとする。このとき,

$$T = \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,$$

$$T_i = (1 - \lambda_i)I + \lambda_i P_i, \quad 0 < \lambda_i < 1$$

P_i は C から C_i の上への sunny nonexpansive retraction

とするなら, $F(T) = \bigcap_{i=1}^m C_i$ であり, さらに, $x \in C$ に対して, $\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元に弱収束する。

証明 E は一様凸であるから, 狭義凸な Banach 空間となる。

定理 G によって, $F(T) = \bigcap_{i=1}^m F(T_i) = \bigcap_{i=1}^m C_i$ である。まず

$\alpha_1 \lambda_1 < \beta_1 < \alpha_1$ となるように β_1 をとる。そして $\mu_1 = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\beta_1}$ とおく。すると $0 < \beta_1 < 1, 0 < \mu_1 < 1$ であり,

$$\begin{aligned} \alpha_1 T_1 &= \alpha_1 \{ (1 - \lambda_1)I + \lambda_1 P_1 \} \\ &= \alpha_1 I - \alpha_1 \lambda_1 I + \alpha_1 \lambda_1 P_1 \\ &= (\alpha_1 - \beta_1)I + \beta_1 I - \mu_1 \beta_1 I + \mu_1 \beta_1 P_1 \\ &= (\alpha_1 - \beta_1)I + \beta_1 \{ (1 - \mu_1)I + \mu_1 P_1 \} \end{aligned}$$

である。そこで、 $T_1 = (1-\beta_1)I + \beta_1 P_1$ と置くと、 T_1 は非拡大写像であり、

$$T = \alpha_1 T_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i T_i = (\alpha_1 - \beta_1)I + \beta_1 T_1' + \sum_{i=2}^m \alpha_i T_i$$

となる。定理Fによつて、 T は asymptotically regular である。そこで定理Eから、任意の $x \in C$ に対して、 $\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元に弱収束する。

§2 Sunny Nonexpansive Retractions

この節では、§1で話題となった sunny nonexpansive retraction の存在について議論する。それを議論する前に2, 3の定義を与えておく。

E を Banach 空間とする。多価写像 $A \subset E \times E$ が増大作用素 (accretive operator) であるとは、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対してつねに

$$(y_1 - y_2, j) \geq 0$$

となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう。 A を増大作用素とし、 $\lambda > 0$ とすると

$$J_\lambda x = \{z \in E : z + \lambda A z \ni x\}$$

で定義される多価写像 (実は一価写像となつてしまい、

$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ と書かれる) は A の resolvent と呼ばれ、その定義域は $R(I + \lambda A)$ であり、その値域は $D(A)$ である。 J_λ

から A の吉田近似といわれる $A_n = \frac{1}{n}(I - J_n)$ も定義できるが、 J_n, A_n の性質については [17] を参照するとよい。

Sunny nonexpansive retraction の存在をいうにあたっては、次の定理が重要である [18]。

定理 I (高橋-上田) E を一様凸で、一様 Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし、 $A \in E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする。 C を E の空でない閉凸集合で、

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする。このとき、 $0 \in R(A)$ ならば、任意の $x \in C$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} J_t x$ が存在して、その極限は $A^{-1}0$ に属する。

これを用いて次の定理が証明できる。その前に補助定理を一つ与えておく [17]。

補助定理 E を Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし、 $C \subseteq E$ の凸集合とする。また $D \subset C$ とし、 P を C から D の上への retraction とする。このとき、任意 $x \in C$ と $y \in D$ に対して、 $(x - Px, J(Px - y)) \geq 0$ がつねに成り立つならば、 P は nonexpansive であり、かつ sunny である。

定理 J E を一様凸で、一様 Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし、 $C \subseteq E$ の閉凸集合とする。 T を C から C への nonexpansive 写像とし、 $F(T) \neq \emptyset$ とする。このとき、 $F(T)$

は C の sunny nonexpansive retract である。

証明 $A = I - T$ とおく。このとき A は $C = D(A) \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$ を満たす accretive 作用素である [17]。また $A^{-1}0 = F(T)$ でもある。定理 I によって、すべての $x \in C$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} T_t x$ は存在する。いま $Px = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t x$ と置くと、 P は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である。実際 $x \in C, z \in A^{-1}0$ に対して

$$(x - T_t x - 0, J(T_t x - z)) \geq 0 \quad (\forall t > 0)$$

であるが、 $Px = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t x$ であるので

$$(x - Px, J(Px - z)) \geq 0$$

となる。よって補助定理より P は sunny nonexpansive retraction である。

§3 Fan の凸不等式のシステム定理

この節では Fan の凸不等式のシステム定理の拡張とその応用について述べることにしよう。まず Fan のシステム定理からコンパクト性と凸性をはずした定理と関数 f_i の値が $(-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ となるような定理を紹介しておこう。定理 A からコンパクト性と凸性をはずすと次の定理となる [16]。

定理 K X をある集合、 f_1, f_2, \dots, f_n を X 上の実数値関数とする。 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $X \times I$ 上の関数 F を

$$F(x, i) = f_i(x) \quad (\forall i \in I, \forall x \in X)$$

とする。また、 F を第 1 変数に関しては convexlike であるとし、 $c \in \mathbb{R}$ とする。このとき、 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ となる m 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ に対して、 $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_0) \leq c$ となる $x_0 \in X$ が存在するなら

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leq c$$

である。

これを用いると、関数 f_i の値が $(-\infty, \infty]$ となるような F のシステムの定理が証明できる [13]。

定理 L (塩路-高橋) X を線形位相空間 E のコンパクト凸な集合とする。 f_1, f_2, \dots, f_m を X から $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半連続で凸な関数とする。このとき、つぎの命題 (1) と (2) は同値である。

(1) 凸不等式のシステム

$$f_i(x) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

が X 上で解をもつ。

(2) $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) \leq 0$$

となる $y \in X$ が存在する。

これからつぎの定理も得られる。

定理 M X を線形位相空間 E の空でないコンパクトな凸集合とする。 $\{f_v : v \in I\}$ を X から $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半連続

で凸な関数の族とする。このときつぎの命題は同値である。

(1) 凸不等式のシステム

$$f_{\nu}(x) \leq 0 \quad (\forall \nu \in I)$$

が X 上で解をもつ。

(2) $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ となる m 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ と $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m \in I$

に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_{\nu_i}(x) \leq 0$$

となる $x \in X$ が存在する。

定理 K を用いると Simons [4] によって証明された一般的な minimax 定理が比較的簡単に証明できる [16]。Fan は彼の凸不等式のシステム定理を用いると Hardy-Littlewood-Pólya の定理が簡単に証明できることを見つけた。この手法を用いて、酒巻-高橋 [2] は彼らの定理を無限次元に拡張することを試みた。また Fan のシステム定理は Markov-Kakutani の不動点定理を介在にすると、Hahn-Banach 定理の拡張である Mazur-Orlicz の定理や König の定理の証明にも有効である [7], [16]。塩路-高橋 [13] はこれを用いて種々のゲームの core を論じた。そこで新しく T-core なるものが定義され、Delbaen の定理などが拡張された形で証明された。このように Fan のシステム定理は純粋数学においてはもちろんのこと応用数学においても非常に有効な定理となっている。

References

- [1] Baillon, J. B., Un théorème de type ergodique pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1571-1574.
- [2] Browder, F. E., Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Symp. Pure Math., 100-2, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1976.
- [3] Bruck, R. E., A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.
- [4] Crombez, G., Image recovery by convex combinations of projections, J. Math. Anal. Appl., 155 (1991), 413-419.
- [5] Fan, K., Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205-217.
- [6] Hirano, N., A proof of the mean ergodic theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 361-365.
- [7] Hirano, N., Komiya, H., and W. Takahashi, A generalization of the Hahn-Banach theorem, J. Math. Anal. Appl., 88 (1982), 333-340.
- [8] Kirk, W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.
- [9] Kitahara, S., and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, to appear in Top. Methods in Nonlinear Anal.

- [10] Lau, A.T., and W. Takahashi, Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings, *Pacific J. Math.*, 126 (1987), 277-294.
- [11] Reich, S., Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 75 (1980), 287-292.
- [12] Sakamaki, K., and W. Takahashi, Systems of convex inequalities and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 70 (1979), 445-459.
- [13] Shioji, N., and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 135 (1988), 383-398.
- [14] Simons, S., Two function theorems and variational inequalities for functions on compact and noncompact sets, with some comments on fixed point theorems, *Proc. Symp. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 377-392.
- [15] Takahashi, W., Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, *J. Math. Soc. Japan*, 28 (1976), 168-181.
- [16] Takahashi, W., Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems, *Proc. Symp. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 419-427.
- [17] 高橋 渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.
- [18] Takahashi, W., and Y. Ueda, On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 104 (1984), 546-553.