数理解析研究所講究録
第861巻1994年154-166

危険回避と微分ゲーム

大阪電通大　西尾真喜子　(Makiko Nisio)

1. 序論.　Barron-Jensen [2] は，株価のようにランダムに時間変動する系の制御に関連して，次の様な問題を取り扱った。Bをd次元ブラウン運動，$B(0)=0$，とし，n次元の系Xが(1-1)に従って，時間発展する。

$$(1\text{-}1)\qquad \frac{dX}{dt} = f(X(t),\ y+B(t),\ U(t)),\qquad t>0$$

初期条件；　$X(0) = x$.

但し，Uは制御過程，$f: R^n \times R^d \times R^\ell \rightarrow R^n$ は有界なめらか。γを(危険回避)効用関数，(1-1)の解を$X(t;x,y,U)$と書く。評価関数 $E\left[g(X(t;x,y,U)) + \int_0^t h(X(s;x,y,U))ds\right]$ の代わりに，平均効用を最大にする制御を行うことにする。したがって，値関数 $v_\gamma(t,x,y) = \sup_U E\gamma\left(g(X(t;x,y,U)) + \int_0^t h(X(s;x,y,U))\,ds\right)$，確実等価値関数(certainty equivalent value function) $V_\gamma(t,x,y) = \gamma^{-1} v_\gamma(t,x,y)$.

[2]では，危険回避度 $(= -\gamma''(\theta)/\gamma'(\theta))$ $\longrightarrow \infty$ のとき，V_γ の極限が微分ゲームに関係することを示している。

次節でこの結果を紹介し，運動系が発展方程式に従う場合を，3節と4節で報告したい。この場合，証明の都合上効用関数は危険回避度一定な関数，$-e^{-\frac{\theta}{c}}$ $(c>0)$，評価関数としても，$g=0$ の場合に制限された。2節でも，この様な場合で[2]を紹介したい。

2. 有限次元運動系の場合。 時間 $T>0$ を固定しておく。B を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d 次元ブラウン運動，$B(0)=0$，U; $[0,T]\times\Omega \longrightarrow R^q$ が B-適合な有界確率過程のとき制御過程という。$\mathcal{A}$ を制御過程全体とする。h ; $R^n \to R^1$ を Lipschitz 連続，効用関数を $Q_c(\theta) = -e^{-\theta/c}$，$\theta \in R^1$，$(c>0)$ として，制御問題，

$$E\, Q_c\left(\int_0^t h(X(s,x,y,U))\,ds\right) \longrightarrow \max$$

を考える。 したがって，値関数 v_c，確実等価値関数 V_c は次式で定義される。

$$\text{(2-1)}\quad \begin{aligned} v_c(t,x,y) &= \sup_{U\in\mathcal{A}} E\, Q_c\left(\int_0^t h(X(s,x,y,U))\,ds\right) \\ V_c(t,x,y) &= Q_c^{-1}\, v_c(t,x,y) \end{aligned}$$

値関数はベルマン原理を満たす為，V_c は H-J-B eq. の一意的粘性解になる。[有限次元非線型方程式の粘性解については [3] を参照]．従って，V_c について次の定理が成立する。

<u>定理 2.1.</u>　V_c は (2-2) の一意的粘性解である。

$$
(2\text{-}2)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\Delta_y V + \dfrac{1}{2c}|\nabla_y V|^2 - \sup\limits_{u\in R^8}\left(\nabla_x V(t,x,y), f(x,y,u)\right) \\
\qquad - h(x) = 0, \quad 0<t<T, \quad x\in R^n, \ y\in R^d. \\
V(0,x,y) = 0
\end{cases}
$$

ここで，∇_z = z に関する gradient，Δ_z = z の Laplacian，

$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Q_c の危険回避度は定数 c であるが，$c \longrightarrow 0$ のとき V_c の極限は次のようになる。

<u>定理 2.2.</u>　$c \longrightarrow 0$ のとき，V_c は広義一様に収束し，極限関数 V は y に無関係で，min-max 方程式 (2-3) の一意的粘性解になる。

$$
(2\text{-}3)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} - \inf\limits_{y\in R^d}\sup\limits_{u\in R^8}\left(\nabla_x V(t,x), f(x,y,u)\right) - h(x) = 0 \\
\qquad\qquad T > t > 0, \quad x\in R^n \\
V(0,x) = 0
\end{cases}
$$

ところが，微分ゲームの upper value が (2-3) の粘性解

を与えることは，よく知られている。大ざっぱに云えば，危険回避度 ∞ の極限では randomness を相手にゲームをすることになる。

$U(t) = z + \int_0^t W(s)\,ds$，但し $z \in R^q$，W は B-適合で $\sup_{s,\omega}|W(s,\omega)| \leq M$，と表わされる制御過程は定数 M の Lipschitz control と呼ばれる。(1-1) の解 X を初期値 (x, y, z) の関数とみなし，許容される制御を定数 M の Lipscitz control に制限した時の値関数，確実等価値関数を $v_c^M(t, x, y, z)$，$V_c^M(t, x, y, z)$ と書くことにする。

定理 2.3.

(i) V_c^M は (2-4) の一意的粘性解になる．

$$
(2\text{-}4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\Delta_y V + \dfrac{1}{2c}|\nabla_y V|^2 - M|\nabla_z V| \\ \qquad - (\nabla_x V(t, x, y, z), f(x, y, z)) - h(x) = 0 \\ V(0, x, y, z) = 0 \end{cases}
$$

(ii) $c \longrightarrow 0$ のとき，V_c^M は広義一様収束し，極限関数 V^M は y に無関係で，(2-5) の一意的粘性解になる．

$$
(2\text{-}5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - M|\nabla_z V| - \inf_{y \in R^d}(\nabla_x V(t, x, z), f(x, y, z)) - h(x) = 0 \\ V(0, x, z) = 0 \end{cases}
$$

(iii) $M \to \infty$ のとき，V^M は広義一様収束し，極限関数 V はそに無関係で，(2-6)の一意的粘性解になる。

$$
(2\text{-}6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - \sup\limits_{z \in R^\delta} \inf\limits_{y \in R^d} \left(\nabla_x V(t,x), f(x,y,z) \right) - h(x) = 0 \\ V(0,x) = 0 \end{cases}
$$

(2-6) 式は，(2-3) 式の inf sup が sup inf に変更された式で，同じ微分ゲームの *lower value* が粘性解を与えることが知られている。

3．発展方程式の場合。　発展方程式 (3-1) に従う系について，同様な問題を考えよう。

$$
(3\text{-}1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi(t,x)}{\partial t} = A\xi(t,x) + b(x, \xi(t,x), y + B(t), U(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in R^n, \quad 0 < t < T, \\ \xi(0,\cdot) = \eta \in L^2(R^n) \end{cases}
$$

ここで A は楕円型微分作用素，

$$
A\zeta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} r^i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - c(x)\zeta,
$$

また，制御過程 $U(t,x)$ を次のように定義する。

$L = L^2(R^n; e^{-|x|^2}dx)$ とおき，制御域 Γ は L，または，それの有限次元部分空間とする．$\mathcal{B}$-適合 Γ 値確率過程 U が有界 (i.e. $\sup_{t,\omega} \|U(t,\omega)\|_L < \infty$) のとき制御過程とよび，$U(t,x) = U(t)(x)$ とおく． $H = L^2(R^n)$，$\langle\ ,\ \rangle$ = 内積，$\|\ \| = /ルム$ とおく．

仮定．

(A.1) a^{ij}，$r^i \in C^3(R^n)$ 且 C^3-norm 有限．

(A.2) 行列 $(a^{ij}(x))$ は一様正定符号．

(A.3) c は有界連続な非負関数

(A.4) b は $R^n \times R^1 \times R^d \times R^1$ 上有界 Lipschitz 連続．

(A.5) $\exists \hat{b} \in L^2(R^n)$；$\sup_{a\,y\,u} |b(x, a, y, u)| \le \hat{b}(x)$ 且．
$\hat{b}$ は $|x|$ のみに依存する減少連続関数．

仮定 (A.2) より (3-2) が成立つ

(3-2) $\exists \mu > 0$ ； $-\langle A\zeta, \zeta\rangle + \mu \|\zeta\|^2 \ge 0 \quad \forall \zeta \in H^1$.

また，(A 4)，(A 5) により，β ; $H \times R^d \times \Gamma \longrightarrow H$ を $\beta(\zeta, y, u)(x) = b(x, \zeta(x), y, u(x))$ と定義し，H 上の方程式 (3-3) の解を (3-1) の解とし よう．

(3-3) $\xi(t) = e^{tA}\eta + \int_0^t e^{(t-s)A} \beta(\xi(s), y + B(s), U(s))\, ds.$

β は明らかに次の連続性を持つ

(3-4). $\|\beta(\xi,\eta,u)-\beta(\xi',y',u')\| \le k(\|\xi-\xi'\|+m(y-y')+m(u-u'))$

但し，kは定数，$m(a)^2=\int \min(|a(x)|^2, \hat{b}(x)^2)\,dx$.

故に，(3-3)は一意解$\xi(t,\eta,y,U)$を持つ.

$h;\ H\to R^1$ を(A.6)を満たす有界Lipschitz連続とする.

(A.6) $\exists F$; $[0,\infty)$上の有界減少連続関数，$\lim_{\theta\to\infty}F(\theta)=0$

$$|h(\eta)-h(\eta')|\le F(R)(\|\eta\|+\|\eta'\|),\quad \{|x|\le R\}\text{上で}\eta=\eta'\text{のとき}.$$

例えば，$h(\xi)=\varphi(\langle\xi,e_1\rangle,\cdots,\langle\xi,e_p\rangle)$となめらかな関数$\varphi$で表わされる場合は(A.6)が成立つ.

値関数v_c，確実等価値関数V_cは，(2-1)と同様に定義され，cに無関係な次の評価が証明出来る。$\rho;[0,\infty)\to[0,1]$をなめらかな減少関数で$\rho=1$ on $[0,1]$，$=0$ on $[2,\infty)$とする．$\Gamma_R(x)=\rho(|x|/R)$とおく。

定理3.1.

(3-5) $$|V_c(t,\eta,y)|\le t|h|_\infty$$

(3-6) $$|V_c(t,\eta,y)-V_c(t',\eta',y')|\le|t-t'||h|_\infty+K\{F(R)(\|\eta\|+\|\eta'\|+\|\hat{b}\|)+\|\Gamma_R\cdot(\eta-\eta')\|_{-1}+\frac{1}{\sqrt{R}}\|\eta-\eta'\|+m(y-y')\}$$

ここで，Kはc, Rに無関係.

さて，V_cが必要なregularityを持つならば，(3-7)を満たすことが形式的な計算で示される.

$$
(3\text{-}7)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} - \langle A^{*}\partial V, \eta\rangle - \dfrac{1}{2}\Delta_y V + \dfrac{1}{2c}|\nabla_y V|^2 - h(y) \\
\qquad\qquad - \sup\limits_{u\in\Gamma}\langle \partial V(t,\eta,y), \beta(\eta,y,u)\rangle = 0 \\
\\
V(0,\eta,y) = 0.
\end{cases}
$$

ここで，$A^{*} = A$ の adjoint，$\partial = \eta$ に関する Frechét 微分．前節と同様，V_c は粘性解になるが，我々が関係するヒルベルト空間上の方程式の粘性解の定義と比較定理を，[5] に従って必要な程度に述べておく．

$$
(3\text{-}8)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial W}{\partial t} - \langle A^{*}\partial W, \eta\rangle - \lambda_1\Delta_y W + \lambda_2|\nabla_y W|^2 + G(\eta, W(t,\eta,y), \partial W) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\
\\
W(0,\eta,y) = 0
\end{cases}
$$

ここで λ_i は定数，$G: H\times R^1\times H \to R^1$ は Lipschitz 連続．$\Phi \in C^{1,1,2}((0T)\times H\times R^d)$ が weakly sequential lower semi-continuous で $A^{*}\partial\Phi$ が連続のとき test function，また，radial な $g\in C^2(H)$ が非減少 $g(0)=0$ のとき radial function と呼ぶことにする。

<u>定義</u>．$W \in C([0T]\times H\times R^d)$，$W(0,\eta,y) = 0$，が任意の test function Φ と radial function g に対して次の条件をみたすとき (3-8) の sub solution (resp.

supersolution) (in viscosity sense) という。

$\hat{z}=(\hat{t},\hat{\eta},\hat{y})\in(0,T)\times H\times R^d$ が $W-\Phi-g$ (resp. $W+\Phi+g$) の local maximum (resp. minimum) を与えるとき,

$$
(3\text{-}9)\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\hat{z})-\langle A^*\partial\Phi(\hat{z}),\hat{\eta}\rangle-\lambda_1\Delta_y\Phi(\hat{z})+\lambda_2|\nabla_y\Phi(\hat{z})|^2\\
&\quad+G(\hat{\eta},W(\hat{z}),\partial\Phi(\hat{z})+\partial g(\hat{\eta}))\le\mu g'(\|\hat{\eta}\|)\|\hat{\eta}\|.
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{aligned}
\text{resp.}\ &-\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\hat{z})+\langle A^*\partial\Phi(\hat{z}),\hat{\eta}\rangle+\lambda_1\Delta_y\Phi(\hat{z})+\lambda_2|\nabla_y\Phi(\hat{z})|^2\\
&\quad+G(\hat{\eta},W(\hat{z}),-\partial\Phi(\hat{z})-\partial g(\hat{\eta}))\ge-\mu g'(\|\hat{\eta}\|)\|\hat{\eta}\|
\end{aligned}\right]
$$

ここで μ は (3−2) の定数.

W が subsolution 且 supersolution のとき,粘性解と呼ぶ。

弱位相を H に入れた時, H_ω と書く.

<u>比較定理.</u> $W,\ \hat{W}\in UC([0\,T]\times H\times R^d)\cap C([0\,T]\times H_\omega\times R^d)$ とする。W が (3-8) の subsolution, $\hat{W}$ が supersolution ならば, $W\le\hat{W}$.

(A.4) と定理 3.1 の評価より, $V_c\in UC([0\,T]\times H\times R^d)\cap C([0\,T]\times H_\omega\times R^d)$. 故に,有限次元の場合と同様伊藤公式を用いて,次の定理が証明される

<u>定理 3.2.</u> V_c は (3-7) の一意的粘性解になる。

さらに,定理 3.1 は $\{V_c,\ c>0\}$ のコンパクト性を与える為,前節と同様な結果を導くことが出来る。

<u>定理3.3.</u>　$c\to 0$ のとき，V_c は $[0\ T]\times H\times R^d$ 上広義一様収束し，極限関数 V は y に無関係で，min-max 方程式の一意的粘性解になる

$$
(3\text{-}10)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t}-\langle A^*\partial V, \eta\rangle-\inf\limits_{y\in R^d}\sup\limits_{u\in\Gamma}\langle\partial V(t,\eta), \beta(\eta,y,u)\rangle \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -h(\eta)=0 \\
V(0,\eta)=0
\end{cases}
$$

(注)．前節と同様，微分ゲームの upper value が (3-10) の粘性解を与えている。

4．Lipschitz control．　この節では，制御域 Γ は $e_1,\cdots e_q$ （ただし $e_1,\cdots e_q$ は H の正規直交系）から生成される L の有限次元部分空間とする。　制御過程 U が

$$
(4\text{-}1).\quad U(t)=z+\int_0^t \zeta(s)\,ds
$$

ここで，$z\in\Gamma$，ζ は B-適合 Γ 値確率過程で $\sup\limits_{s,\omega}\|\zeta(s,\omega)\|\le M$ とする。　この様に書けるとき，U を定数 M の Lipschitz control と呼ぶ。　$U^i=\langle U, e_i\rangle$，$i=1\cdots q$．とおき，制御過程を q 次元確率過程と同一視し，β を $H\times R^d\times R^q$ 上の関数とみなす。

　さて，3節の問題を Lipschitz control に制限して考えよう。　[1] に従って，R^q の ball $\{|w|\le M\}$ を制御域

$z(s) = (z^1(s), \cdots z^q(s))$ を admissible control として，(3-1) の代わりに次の系を取扱う。

$$
(4\text{-}2) \quad \begin{cases} d\xi(t) = \left(A\xi(t) + \beta(\xi(t), Y(t), U(t))\right) dt \\ dY(t) = dB(t) \\ dU(t) = z(t)\, dt \end{cases}
$$

初期条件； $\xi(0) = \eta\ (\in H)$, $Y(0) = y\ (\in R^d)$, $U(0) = z\ (\in R^q)$.

(4-2) の解を $\xi(t;\eta, y, z, z)$ と表わし，値関数，確実等価値関数を，それぞれ $v_c^M(t, \eta, y, z)$, $V_c^M(t, \eta, y, z)$ と書く．

定理 4.1. V_c^M は (4-3) の一意的粘性解である。

$$
(4\text{-}3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - \langle A^*\partial V, \eta \rangle - \dfrac{1}{2}\Delta_y V + \dfrac{1}{2c}|\nabla_y V|^2 - M|\nabla_z V| \\ \qquad\qquad - \langle \partial V(t, \eta, y, z), \beta(\eta, y, z)\rangle - h(\eta) = 0 \\ V(0, \eta, y, z) = 0 \end{cases}
$$

証明. v_c^M はベルマン原理をみたす事，(4-4) の一意的粘性解になる事が容易に分る．

$$
(4\text{-}4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \langle A^*\partial v, \eta \rangle - \dfrac{1}{2}\Delta_y v - \langle \partial v(t, \eta, y, z), \beta(\eta, y, z)\rangle \\ \qquad\qquad - \sup\limits_{|w|\le M} (\nabla_z v, w) + \dfrac{1}{c} h(\eta)\, v = 0 \\ v(0, \eta, y, z) = -1 \end{cases}
$$

故に，$V_c^M = Q_c^{-1}(v_c^M)$ は次式の一意的粘性解になる。

$$(4\text{-}5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - \langle A^*\partial V, \eta\rangle - \dfrac{1}{2}\Delta_y V + \dfrac{1}{2c}|\nabla_y V|^2 - \sup_{|w|\le M}(\nabla_z V, w) \\ \qquad\qquad - \langle \partial V(t,\eta,y,z), \beta(\eta,y,z)\rangle - h(\eta) = 0 \\ V(0,\eta,y,z) = 0 \end{cases}$$

ところが，$\delta \in R^q$ に対し，$\sup_{|w|\le M}(\delta, w) = M|\delta|$ となるから，定理が成立つ。■

定理 3.1 の評価を用いて，前節と同様の結果を導くことが出来る。

定理 4.2.

(i) M を固定しておく。$c \to 0$ のとき，V_c^M は $[0\ T]\times H \times R^d \times R^q$ 上広義一様収束し，その極限関数 V^M は y に無関係で (4-6) の一意的粘性解である。

$$(4\text{-}6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - \langle A^*\partial V, \eta\rangle - M|\nabla_z V| \\ \qquad\qquad - \inf_{y\in R^d}\langle \partial V(t,\eta,z), \beta(\eta,y,z)\rangle - h(\eta) = 0 \\ V(0,\eta,z) = 0 \end{cases}$$

(ii). $M \to \infty$ のとき，V^M は $[0\ T]\times H\times R^q$ 上広義一様収束し，極限関数 W は z に無関係になり，max-min 方程式 (4-7) の一意的粘性解である。

$$(4\text{-}7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} - \langle A^* \partial W, \eta \rangle - \sup\limits_{z \in R^q} \inf\limits_{y \in R^d} \langle \partial W(t,\eta), \beta(\eta, y, z) \rangle - h(\eta) = 0 \\ W(0, \eta) = 0 \end{cases}$$

(注). 既に注意したように，極限関数 Wは微分ゲームのlower valueと等しくなる。さらに，ΓをR^qと同一視したことより(4-7)は(3-11)のinf supがsup infに変わった方程式になり，VとWは同じ微分ゲームのupper valueとlower valueになる。また，cを固定して$M \to \infty$とすれば，V_c^MはV_cに収束する。したがって $\lim\limits_{c \to 0} \lim\limits_{M \to \infty} V_c^M = V$.

References

1. E.N.Barron, L.C.Evans & R.Jensen; Viscosity solutions of IIsaacs'equations and differential games with Lipschitz controls Jour.Diff.Eq.53.213-233(1984)
2. E.N.Barron & R.Jensen; Total risk aversion, stochastic optimal control and differential games, Appl.Math.Opt.19.313-327(1989)
3. M.G.Crandall,H.Ishii & P.L.Lions; A user's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull.Amer.Math.Soc. N.S. 27.1-67(1992)
4. M.Nisio; On total risk aversion and differential games for controlled parabolic equations, Proc.Jap.Acad.69.119-124(1993)
5. A.Świech; Viscosity solutions of fully nonlinear partial differential equations with unbounded terms in infinite dimensions, Thesis, Univ. of Calif. (1993)