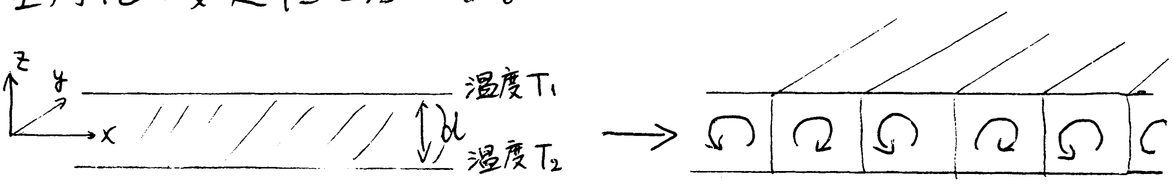
数理解析研究所講究録
第862巻 1994年 56-67


# ブシネスク方程式の定常解の安定性について

九大・工 隠居 良行 (Yoshiyuki Kagei)

2枚の水平平行板間にある静止した流体を下から一様に熱すると、上下面の温度差が小さいと流体は静止したままであるが、この温度差がある値を越えると静止状態は不安定になり対流が発生する。このとき、対流は水平方向に並んだロール型のパターンをもつ定常運動をする。ここでは、このロール型対流の安定性を考える。




1. 流体層の厚さを$d$，上面の温度を$T_1$、下面の温度を$T_2$とする。水平方向を$x,y$-方向に、垂直方向を$z$方向にとると、この対流現象を記述する方程式は、無次元形で書くと、次のようになる。

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \sqrt{R}\,\theta e_z + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0 \\ \nabla\cdot u = 0 \\ P_r \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta - \sqrt{R}\, u\cdot e_z + P_r\, u\cdot\nabla\theta = 0. \end{cases} \qquad \left((x,y,z)\in\mathbb{R}^2\times(0,1),\ t>0\right)
$$

ここで、$u=(u_x,u_y,u_z)$は速度場、$p$は圧力、$\theta$は温度と静止

状態の温度分布を表す $1-z$ との差、$e_z=(0,0,1)$ である。$R$ はレーリー数、$Pr$ はプラントル数と呼ばれる無次元数で、

$$R=\frac{g\chi(T_0-T_1)d^3}{\nu\kappa}, \qquad Pr=\frac{\nu}{\kappa}.$$

ただし、$g$ は重力定数、$\chi$ は体積膨張率、$\nu$, $\kappa$ はそれぞれ動粘性率、熱伝導率である。

境界条件としては、ここでは自由境界条件

(2) $\quad \partial_x u_x=\partial_y u_y=u_z=0, \quad \theta=0 \quad \text{at } z=0,1$

を考え、また、$x,y$-方向には次の周期条件

(3) $\quad u, \theta$ は $(x,y)$ について $(-\frac{\pi}{\alpha},\frac{\pi}{\alpha})\times(-\frac{\pi}{\beta},\frac{\pi}{\beta})$-周期

を課すことにする。これらに初期条件

(4) $\quad u|_{t=0}=u_0, \quad \theta|_{t=0}=\theta_0$

を加え、初期値境界値問題(1)−(4)が設定される。

初期値境界値問題(1)−(4)を考える際に、ソレノイドベクトル場 $u$ に対する次のポロイド−トロイド−平均流分解

$$\begin{aligned}
u &= \mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,(e_z\varphi)+\mathrm{curl}\,(e_z\psi)+f \\
&= \begin{pmatrix}\partial_{xz}\varphi\\ \partial_{yz}\varphi\\ -\Delta_2\varphi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\partial_y\psi\\ -\partial_x\psi\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_1(z)\\ f_2(z)\\ 0\end{pmatrix} \\
&\equiv \delta\varphi+\varepsilon\psi+f
\end{aligned}$$

を用いる。ここで、$\Delta_2=\partial_{xx}+\partial_{yy}$, $\varphi$, $\psi$ は $u$ と同じ周期をもち、$P=(-\frac{\pi}{\alpha},\frac{\pi}{\alpha})\times(-\frac{\pi}{\beta},\frac{\pi}{\beta})$ 上での積分が $0$, i.e.

$$\int_P\varphi\,dxdy=\int_P\psi\,dxdy=0.$$

f は z のみの関数で

$$f(z)=\frac{1}{|P|}\int_P u(x,y,z)\,dxdy,$$

この分解を用いると、(1)は

$$(5)\quad\begin{cases}(-\Delta)(-\Delta_2)\varphi'+\Delta^2(-\Delta_2)\varphi-\sqrt{R}(-\Delta_2)\theta+\underline{\delta}\cdot[(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+f)\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+f)]=0,\\ (-\Delta_2)\psi'+(-\Delta)(-\Delta_2)\psi-\underline{\varepsilon}\cdot[(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+f)\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+f)]=0,\\ Pr\,\theta'+(-\Delta)\theta-\sqrt{R}(-\Delta_2)\varphi+Pr(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+f)\cdot\nabla\theta=0,\\ f_1'+(-\partial_{zz})f_1+\frac{1}{|P|}\int_P(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)_x\,dxdy=0,\\ f_2'+(-\partial_{zz})f_2+\frac{1}{|P|}\int_P(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)_y\,dxdy=0,\end{cases}$$

とかくことができ、境界条件は

(6) $\varphi=\partial_{zz}\varphi=\partial_z\psi=\theta=\partial_z f_1=\partial_z f_2=0$ at $z=0,1$,

(7) $\varphi,\psi,\theta$ は $(x,y)$ について $P$－周期

となる。初期条件は

(9) $\varphi|_{t=0}=\varphi_0,\ \psi|_{t=0}=\psi_0,\ \theta|_{t=0}=\theta_0,\ f_1|_{t=0}=f_{10},\ f_2|_{t=0}=f_{20}$

となる。このとき、自明解 $\varphi=\psi=\theta=f_1=f_2=0$ は、静止状態を表す解になっている。

2. この節では初期値境界値問題(5)－(9)を取り扱うためにいくつかの記号を導入し、作用素を定義する。$\Omega=P\times(0,1)=(-\frac{\pi}{\alpha},\frac{\pi}{\alpha})\times(-\frac{\pi}{\beta},\frac{\pi}{\beta})\times(0,1)$ に対して、

$$L^2_M(\Omega)=\{\varphi\in L^2(\Omega);\ \int_P\varphi\,dxdy=0\}.$$

定義. $L^2_M(\Omega)\ni\varphi$ を

$$\varphi(x,y,z)=|P|^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2-\{0\}}a_k(z)e^{i(\alpha k_1x+\beta k_2y)}$$

とおく。 $k=(k_1,k_2)\in \mathbb{Z}^2-\{0\}$ に対して、

$$A_k=(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2-\partial_{zz})^2=(\alpha^2k_1^2+\beta k_2^2)^2-2(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2)\partial_{zz}+\partial_{zzzz}$$

$$D(A_k)=\{f\in H^4(0,1)\,;\ f=\partial_{zz}f=0\quad at\ z=0,1\}$$

とおく。 $A=\Delta^2(-\Delta_2)$ を次で定義する。

$$A\varphi=|\mathcal{P}|^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2-\{0\}}(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2)A_k a_k e^{i(\alpha k_1x+\beta k_2 y)},$$

$$D(A)=\{\varphi\in L^2_M(\Omega)\,;\ a_k\in D(A_k),\ \forall k\in\mathbb{Z}^2-\{0\},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2-\{0\}}\int_0^1(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2)^2|A_ka_k|^2dz<\infty\}.$$

次に、

$$B_k=(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2-\partial_{zz}),$$

$$D(B_k)=\{f\in H(0,1)\,;\ f=0\ ,at\ z=0,1\}.$$

とおく。 $B=(-\Delta)(-\Delta_2)$ を次で定義する。

$$B\varphi=|\mathcal{P}|^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2-\{0\}}(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2)B_k a_k e^{i(\alpha k_1x+\beta k_2 y)},$$

$$D(B)=\{\varphi\in L^2_M(\Omega)\,;\ a_k\in D(B_k),\ \forall k\in\mathbb{Z}^2-\{0\},$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2-\{0\}}\int_0^1(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2)|B_ka_k|^2dz<\infty\}.$$

また、

$$B_{k,N}=(\alpha^2k_1^2+\beta^2k_2^2-\partial_{zz}),$$

$$D(B_{k,N})=\{f\in H(0,1)\,;\ \partial_zf=0\quad at\ z=0,1\}$$

とおき、 $B_N=(-\Delta)(-\Delta_2)$, $D(B_N)$ を上と同様に定義する。
$(-\Delta)$, $(-\Delta_2)$ も上のようにして定義する。

このとき、$A$, $B$, $B_N$, $(-\Delta)$, $(-\Delta_2)$ は、それぞれ、$L^2_M(\Omega)$, $L^2_M(\Omega)$, $L^2_M(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ および $L^2_M(\Omega)$ で正定値自己共役と

なる。次に、

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & & & & \\ & B_N & & O & \\ & & (-\Delta) & & \\ & O & & -\partial_{zz} & \\ & & & & -\partial_{zz} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & & & & \\ & (-\Delta_2) & & O & \\ & & Pr\,I & & \\ & O & & I & \\ & & & & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-\Delta_2) & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ (-\Delta_2) & & O & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

とおくと、$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$は$\mathcal{H}(\Omega) = L^2_M(\Omega) \times L^2_M(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2_M(0,1) \times L^2_M(0,1)$で正定値自己共役になり、初期値境界値問題(5)−(9)は次のようにかける。$\Phi = (\varphi, \psi, \theta, f_1, f_2)$として、

$$(10) \begin{cases} \mathcal{B}\Phi' + \mathcal{A}\Phi - \lambda \mathcal{C}\Phi + \mathcal{M}(\Phi, \Phi) = 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{cases}$$

ここで、$\mathcal{M}(\Phi,\Phi)$は(5)の非線形項に対応するものであり、$\lambda = \sqrt{R}$である。(ポロイダル−トロイダル−平均流分解については[4]を参照。)

3. $\lambda$を大きくしていくと、自明解$\Phi \equiv 0$は不安定化を起こし、ロール型対流解が分岐してあらわれる。これをみるために、$\partial_y \equiv 0$, $\Omega = (-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}) \times (0,1)$とし、固有値問題

$$(11) \quad -\sigma \mathcal{B}\Phi + \mathcal{A}\Phi - \lambda \mathcal{C}\Phi = 0$$

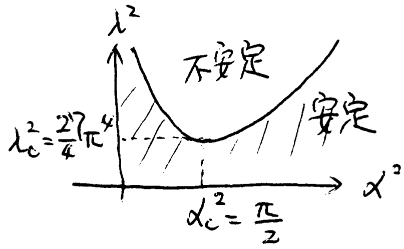
を$\mathcal{H}_{even}(\Omega)$で考える。ここで、

$$\mathcal{H}_{even}(\Omega) = \{\Phi = (\varphi, \psi, \theta, f_1, f_2) \in \mathcal{H}(\Omega);\ \varphi, \psi, \theta \text{ は } x \text{ について even}\}.$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$は正定値だから$\lambda$が十分小さいときは、すべての固有

値σは正である。λを大きくしていったときに、σ=0が固有値となるようなλの値で自明解は不安定になるが、そのようなλはΦのフーリエ展開を(1)に代入すると次のように決まることがわかる：

$$\lambda^2 = R = \frac{(\alpha^2+\pi^2)^3}{\alpha^2},$$




λを大きくしていったとき、最初に不安定となるのは、$\lambda_c^2 = R_c = \frac{27}{4}\pi^4$ のとき、$\alpha_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ である。また、$x$について偶関数の空間で考えていることから、0固有空間の次元は1となり、$(\sin\pi z\cos\alpha_c x,\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2\sin\pi z\cos\alpha_c x,\ 0,\ 0)$ が固有関数となる。このとき、Ljapunov-Schmidtの方法によって次のような分岐解 $\{\Phi_{s\varepsilon},\lambda_\varepsilon\}$ $(0<\varepsilon<{}^{\exists}\varepsilon_0)$ を得ることができる。

$$\Phi_{s\varepsilon} = \Phi_s = (\varphi_s, \psi_s, \theta_s, f_{1s}, f_{2s}),$$

$$\begin{cases} \varphi_s = \varepsilon\sin\pi z\cos\alpha_c x + O(\varepsilon^3), \\ \theta_s = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2\sin\pi z\cos\alpha_c x - \varepsilon^2\frac{\sqrt{3}}{32}\pi^3 Pr\sin 2\pi z + O(\varepsilon^3), \\ \psi_s = f_{1s} = f_{2s} = 0, \\ \lambda_\varepsilon = \lambda = \lambda_c + \varepsilon^2\frac{9\pi^6}{64}Pr^2 + O(\varepsilon^4). \end{cases}$$

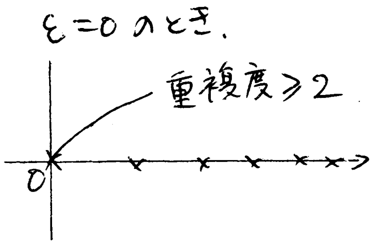
自明解からの分岐については、Judovič [1], Rabinowitz [2]などの研究がある。詳しい解説がKirchgässner-Kielhöfer [3]にある。

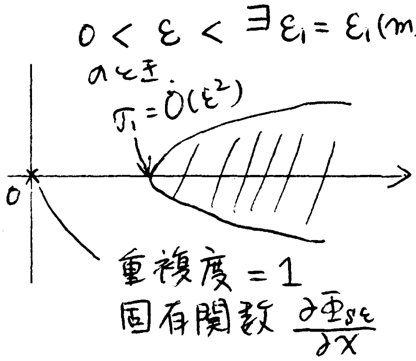
4. 3で得たロール型対流解$\Phi_{s\varepsilon}$を $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\times(0,1)$ 上に、$\Phi_{s\varepsilon}(x,y,z) = \Phi_{s\varepsilon}(\bar{x},z)$, $x = \bar{x} + \frac{2k\pi}{\alpha_c}$, $\bar{x}\in(-\frac{\pi}{\alpha_c},\frac{\pi}{\alpha_c})$, $k\in\mathbb{Z}$

として拡張したものも解になっている。このように拡張した $\Phi_{s\varepsilon}$ の、$x$-方向に $\frac{2m\pi}{\alpha_c}$ 周期 ($m\in\mathbb{N}$) で $y$-方向に $\frac{2\pi}{\beta}$ 周期であるような3次元攪乱に対する安定性を調べたい。そこで、$\Omega = \left(-\frac{m\pi}{\alpha_c}, \frac{m\pi}{\alpha_c}\right)\times\left(-\frac{\pi}{\beta}, \frac{\pi}{\beta}\right)\times(0,1)$ として、$\Phi_{s\varepsilon}$ のまわりでの線形化固有値問題

$$-\sigma\mathcal{B}\Phi + \mathcal{A}\Phi - \lambda_\varepsilon \mathcal{C}\Phi + \mathcal{M}(\Phi_{s\varepsilon},\Phi) + \mathcal{M}(\Phi,\Phi_{s\varepsilon}) = 0$$

を $\mathcal{H}(\Omega)$ で考える。このとき、摂動法によって、固有値の分布は次のようになることがわかる。




固有値0は $x$-方向の平行移動に関する不変性によるものである。したがって、(10) の解は $t\to\infty$ のとき $\Phi(x+h, z)$, $^{\exists}h\in\mathbb{R}$, に収束する。このことをみるために、(10) の両辺に $\mathcal{B}^{-1}$ をかけると、

$$\Phi' + \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{B}^{-1}[-\lambda\mathcal{C}\Phi + \mathcal{M}(\Phi,\Phi)] = 0。$$

作用素 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ は $D(\mathcal{B}^{1/2})$ で自己共役拡張 $\tilde{\mathcal{A}}$ をもつ；

$$\tilde{\mathcal{A}} : D(\mathcal{B}^{1/2}) \longrightarrow D(\mathcal{B}^{1/2}),$$

$$D(\tilde{\mathcal{A}}) = H_1\times H_2\times H_3\times H_4\times H_5,$$

$$H_1 = \{\varphi\in \dot{D}(B^{1/2});\ \Delta\varphi\in D(B^{1/2}),\ \varphi = \partial_{zz}\varphi = 0 \text{ at } z=0,1\},$$

$H_2 = \{\psi \in D((-\Delta_2)^{1/2}); \Delta\psi \in D((-\Delta_2)^{1/2}), \partial_z\psi = 0 \ \text{at}\ z=0,1\}$,

$H_3 = D((-\Delta))$, $H_4 = H_5 = \{f \in H^2(0,1); \int_0^1 f\,dz = 0, \partial_z f = 0 \ \text{at}\ z=0,1\}$

ここで、次のような記号を導入する。

$H = D(\mathcal{B}^{1/2})$, $H^\gamma = D(\tilde{\mathcal{A}}^{\gamma/2})$, $\|\cdot\|_\gamma = \|\tilde{\mathcal{A}}^{\gamma/2}\cdot\|_H$ $(\gamma \geq 0)$,

$L_\varepsilon \Phi = \tilde{\mathcal{A}}\Phi + \mathcal{B}^{-1}[-\lambda_\varepsilon \mathcal{C}\Phi + \mathcal{M}(\Phi_{s\varepsilon}, \Phi) + \mathcal{M}(\Phi, \Phi_{s\varepsilon})]$,

$L_\varepsilon^*$ : $L_\varepsilon$の共役作用素.

以下、次を考える。

(12) $\quad \Phi' + \tilde{\mathcal{A}}\Phi + \mathcal{B}^{-1}[-\lambda\mathcal{C}\Phi + \mathcal{M}(\Phi,\Phi)] = 0$.

このとき、次が成立する。

<u>定理.</u> $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$とする。

$\Phi(x,y,z,t)$ : (12)の解で $\Phi(x,y,z,0) = \Phi_{s\varepsilon}(x,z) + \eta\phi_0(x,y,z)$,

ここで、$\phi_0 \in H^\gamma$ $(3/2 < {}^\exists\gamma < 2)$. $0 < a < \sigma_1$ とする。

このとき、$\exists \eta_0 = \eta_0(\phi_0, a, \gamma, \Phi_{s\varepsilon}) > 0$, $\exists h \in C^1(-\eta_0, \eta_0)$,

$\exists C = C(\phi_0, a, \gamma, \Phi_{s\varepsilon}) > 0$ s.t.

$\|\Phi(\cdot,\cdot,\cdot,t) - \Phi_{s\varepsilon}(\cdot + \eta h(\eta), \cdot)\|_\gamma \leq Ce^{-at}$, $t \geq 0$.

ここで、関数$h$は $h(0) = (\phi_0 \Psi)_H$ をみたす。ただし、$\Psi$は

$\Psi \neq 0$, $L_\varepsilon^* \Psi = 0$, $\left(\frac{\partial\Phi_{s\varepsilon}}{\partial x}, \Psi\right)_H = 1$.

(証明の概略) $\Phi_{s\varepsilon} = \Phi_s$ とかき、$L_\varepsilon = L$ とかく。

$\Phi(x,y,z,t) = \Phi_s(x+\eta h, z) + \eta\phi(x,y,z,t)$

とし ($h, \phi$が求めたいもの)、(12)に代入すると、

$$(13)\begin{cases} \partial_t \phi + L\phi + \eta F(\phi, h, \eta) + \eta \mathcal{N}(\phi) = 0, \\ \phi(x, y, z, 0) = \phi_0(x, y, z) - h\dfrac{\partial \Phi_s}{\partial x}(x, z) + \eta G(\phi, h, \eta) \end{cases}$$

を得る。ここで、

$$F(\phi, h, \eta) = h\int_0^1 B^{-1}\left[M\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial x}(x+\tau\eta h, z), \phi\right) + M\left(\phi, \frac{\partial \Phi_s}{\partial x}(x+\tau\eta h, z)\right)\right] d\tau,$$

$$\mathcal{N}(\phi) = B^{-1} M((\phi, \phi)),$$

$$G(\phi, h, \eta) = h^2 \int_0^1 (1-\tau)\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2}(x+\tau\eta h, z)\, d\tau.$$

$P_1$ を、$P_1\phi = (\phi, \Psi)_H \dfrac{\partial \Phi_s}{\partial x} \equiv \langle \phi \rangle \dfrac{\partial \Phi_s}{\partial x}$ で定めると、$P_1$ は $N(L)$ 上への射影となる。$P_2 = I - P_1$ とおくと、$\phi(t)$ は、

$$\phi(t) = P_1\phi(t) + P_2\phi(t) \equiv \phi_1(t)\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \phi_2(t), \quad \phi_1(t) = \langle \phi(t) \rangle$$

と分解できる。このとき、(13) は次のようになる。

$$(14)\begin{cases} \dot{\phi}_1 + \eta\langle F(\phi, h, \eta)\rangle + \eta\langle \mathcal{N}(\phi)\rangle = 0, \\ \partial_t \phi_2 + L_2\phi_2 + \eta P_2(F(\phi, h, \eta) + \mathcal{N}(\phi)) = 0, \\ \phi_1(0) = \langle \phi_0 \rangle - h + \eta\langle G(\phi, h, \eta)\rangle, \\ \phi_2(0) = P_2[\phi_0 + \eta G(\phi, h, \eta)], \end{cases}$$

ここで、$\phi = \phi_1 \dfrac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \phi_2$, $L_2 = P_2 L = L P_2$。(14) を積分方程式に書きかえると、

$$(15)\quad \phi_1(t) = \phi_1(0) - \eta\int_0^t \langle F(\phi, h, \eta) + \mathcal{N}(\phi)\rangle d\tau,$$

$$(16)\quad \phi_2(t) = e^{-tL_2}P_2[\phi_0 + \eta G(\phi, h, \eta)] + \Gamma P_2[F(\phi, h, \eta) + \mathcal{N}(\phi)].$$

ここで、 $\Gamma\phi(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)L_2}\phi(\tau)d\tau$, $\phi(\tau)\in P_2H$。

$t\to\infty$ のとき、$\phi(t)\to 0$ となるような解をつくりたいので、(15) で $t\to\infty$ として、

(17) $$0 = \phi_1(0) - \eta\int_0^\infty \langle F(\phi,h,\eta)+N(\phi)\rangle d\tau$$
$$= \langle\phi_0\rangle - h + \eta\langle G(\phi,h,\eta)\rangle - \eta\int_0^\infty\langle F(\phi,h,\eta)+N(\phi)\rangle d\tau$$

でなければならない。(17) を (15) に代入すると、

(18) $$\phi_1(t) = \eta\int_t^\infty \langle F(\phi,h,\eta)+N(\phi)\rangle d\tau。$$

(16), (17), (18) をみたす $(\phi_1,\phi_2,h)$ を求めたい。陰関数定理を用いて、十分小さな $\eta$ に対して $(\phi_1(\eta),\phi_2(\eta),h(\eta))$ を構成する。そこで、

$$\mathcal{F}_1(\phi_1,\phi_2,h,\eta) = \phi_1(t) - \eta\int_t^\infty \langle F(\phi,h,\eta)+N(\phi)\rangle d\tau,$$
$$\mathcal{F}_2(\phi_1,\phi_2,h,\eta) = \phi_2(t) - e^{-tL_2}P_2[\phi_0+\eta G(\phi,h,\eta)] - \eta\Gamma P_2[F(\phi,h,\eta)+N(\phi)],$$

$$\mathcal{F}_3(\phi_1,\phi_2,h,\eta) = \langle\phi_0\rangle - h + \eta\langle G(\phi,h,\eta)\rangle - \eta\int_0^\infty\langle F(\phi,h,\eta)+N(\phi)\rangle d\tau$$

とおく。ここで、$\phi = \phi_1\frac{\partial\Phi_s}{\partial x}+\phi_2$。次に、

$$\mathcal{F}(\phi_1,\phi_2,h,\eta) = (\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)(\phi_1,\phi_2,h,\eta)$$

とすると、(16), (17), (18) は $\mathcal{F}(\phi_1,\phi_2,h,\eta)=0$ となる。

これを解くために、

$$\mathcal{S}^a = \{\psi \in C[0,\infty) ;\ |\psi|_a \equiv \sup_{t\geq 0} e^{at} |\psi(t)| < \infty\},$$

$$\mathcal{H}^{\gamma,a} = \{\varphi \in C([0,\infty); H^\gamma) ;\ \|\varphi\|_{\gamma,a} \equiv \sup_{t\geq 0} e^{at} \|\varphi(t)\|_\gamma < \infty\}$$

とおく。このとき、 $\gamma > 3/2$ であれば、

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^a \times \mathcal{H}^{\gamma,a} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}^a \times \mathcal{H}^{\gamma,a} \times \mathbb{R}$$

は、フレシェ微分可能になる。そこで、

$$\bar{\phi}_1 = 0 \quad , \quad \bar{\phi}_2 = e^{-tL_2} P_2 \phi_0, \quad \bar{h} = \langle \phi_0 \rangle$$

とおくと、

$$\mathcal{F}(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{h}, 0) = 0$$

であり、$\mathcal{F}$ の $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{h}, 0)$ におけるフレシェ微分は、

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\phi_1, \phi_2, h)}\right|_{(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{h})} = \begin{pmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}.$$

したがって、陰関数定理によって、

$$\exists\, (\phi_1(\eta), \phi_2(\eta), h(\eta)) \in \mathcal{S}^a \times \mathcal{H}^{\gamma,a} \times \mathbb{R} \ \text{s.t.}$$

$$\mathcal{F}(\phi_1(\eta), \phi_2(\eta), h(\eta), \eta) = 0 \quad //$$

参考文献

[1] V. I. Judovič, Prikl. Mat. Meh. 31 (1967)
= J. Appl. Math. Mech. 31 (1967)

[2] K. Kirchgässner - H. Kielhöfer, Rocky Mount. J. Math. 3 (1973)

[3] P. H. Rabinowitz, Arch. Rat. Mech Anal. 29 (1968)

[4] B. Schmitt - W. von Wahl, Lect. Notes in Math. 1530.