数理解析研究所講究録
第 872 巻 1994 年 144-149

On a straight-line embedding problem of graphs

(グラフの直線埋め込み問題について)

Shin-ichi TOKUNAGA　　徳永 伸一
Science University of Tokyo　　東京理科大学・理

1. 問題の定式化

有限集合 A に対して，$|A|$ で A に属する要素の個数を表す．またグラフ G に対し，$V(G), E(G)$ でそれぞれ G の頂点集合，辺集合を表す．

定義 1 G を頂点数 n の平面的グラフとする．G の $\mathbb{R}^2$ (ユークリッド平面) への埋め込みのうち，G の各辺の像が $\mathbb{R}^2$ 上の (まっすぐな) 線分となるものを直線埋め込み (straight-line embedding) と呼ぶ．さらに $\mathbb{R}^2$ 上の $|P| = n$ なる点集合 P に対して，G の各頂点をそれぞれ P の異なる点に写すような直線埋め込みを G の P への直線埋め込みと呼ぶ．

以下 G を頂点数 n の平面的グラフ，P を $\mathbb{R}^2$ 上に配置された n 個の点の集合とする．ただしここでいう配置とは，一般の位置に (すなわち P のどの 3 点も同一直線上にないように) 与えられたものに限るとする．

I. Fáry[1] の有名な定理により，任意の平面的グラフは直線埋め込み可能である．与えられた P への直線埋め込み問題については，次の結果が知られている．ここでグラフ G が外平面的であるとは，G のすべての頂点が 1 つの共通な領域 (無限面) の境界上にあるように平面に埋め込み可能であること．

定理 A. (H. De Frraysseix, J. Pach, and R. Pollack[2])
G が任意の配置の P への直線埋め込みを持つための必要十分条件は，G が外平面的であることである．

M. Perles は G が tree の場合についてさらに強い次の命題を考えた．ここで rooted tree とは root と呼ばれる特別な (といっても単に他と区別されるというだけのこと) 1 頂点を持つ tree のこと．

< Perles の問題 > 頂点数 n の任意の rooted tree は，任意の配置の P に対して，root を P の指定された点へ移すような P への直線埋め込みを持つか？

Perles の問題は 1991 年に田村，池辺，徳永 [4] により肯定的に解決された (これを定理 B とする)．そこで本論文では対象を tree 以外のグラフにまでひろげ，次の問題を考える．

<一般化された Perles の問題> 特別な 1 頂点 v（rooted tree における root に相当）を持つグラフ G が，下記の性質 (*) を持つための G と vの必要十分条件は何か？

性質 (*)： 任意の配置の Pにおいて任意に 1 点 $p \in P$が指定されたとき，G の Pへの直線埋め込みϕで $\phi(v) = p$ となるものが存在する．

つまりグラフ G において,「外平面的であること」は性質 (*) を持つための必要条件であり,「tree であること」は十分条件の 1 つである．

2. 本論文における主要な結果

<一般化された Perles の問題>の解決のため，まずは必要条件から攻め，次の定理を得た．ここで $X \subseteq V(G), v \in V(G)$ に対して，$N(X)$ で Xの G における近傍（Xの少なくとも 1 頂点に隣接する G の頂点の集合）を表し，$\deg_G(v)$ で vの次数（vに接続する辺の本数）を表す．

定理 1. 特別な 1 頂点 vを持つグラフ G が性質 (*) を持つならば，G は外平面的で，かつ以下の条件 (C1)〜(C5) のいずれかを満たす.（以下条件 (Ci) を満たす外平面的グラフの族をタイプ (Ci)と呼ぶことにする．各タイプのグラフは図 1 のように図式化される.）

(C1) $G - v$ のすべての成分の頂点数が$\frac{n+1}{2}$以下.

(C2) 下記の条件を満たす 2 頂点 $u, w \in V(G)-\{v\}$ と分割 $V(G)-\{u,v,w\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ が存在する．

$$|V_1| \le \frac{n-2}{2} \quad and \quad N(V_1) - V_1 \subset \{v, u\},$$
$$|V_2| \le \frac{n-3}{2} \quad and \quad N(V_2) - V_2 \subset \{u, w\},$$
$$|V_3| \le \frac{n-2}{2} \quad and \quad N(V_3) - V_3 \subset \{w, v\};$$

(C3) $\deg_G(v) = 1$ で，vに隣接する G の頂点を x とするとき，下記の条件を満たす 2 頂点 $u, w \in V(G) - \{v, x\}$ と分割 $V(G) - \{u, v, w, x\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ が存在する．

$$|V_1| \le \frac{n-3}{2} \quad and \quad N(V_1) - V_1 \subset \{u, x\},$$
$$|V_2| \le \frac{n-3}{2} \quad and \quad N(V_2) - V_2 \subset \{u, w\},$$
$$|V_3| \le \frac{n-3}{2} \quad and \quad N(V_3) - V_3 \subset \{w, x\};$$

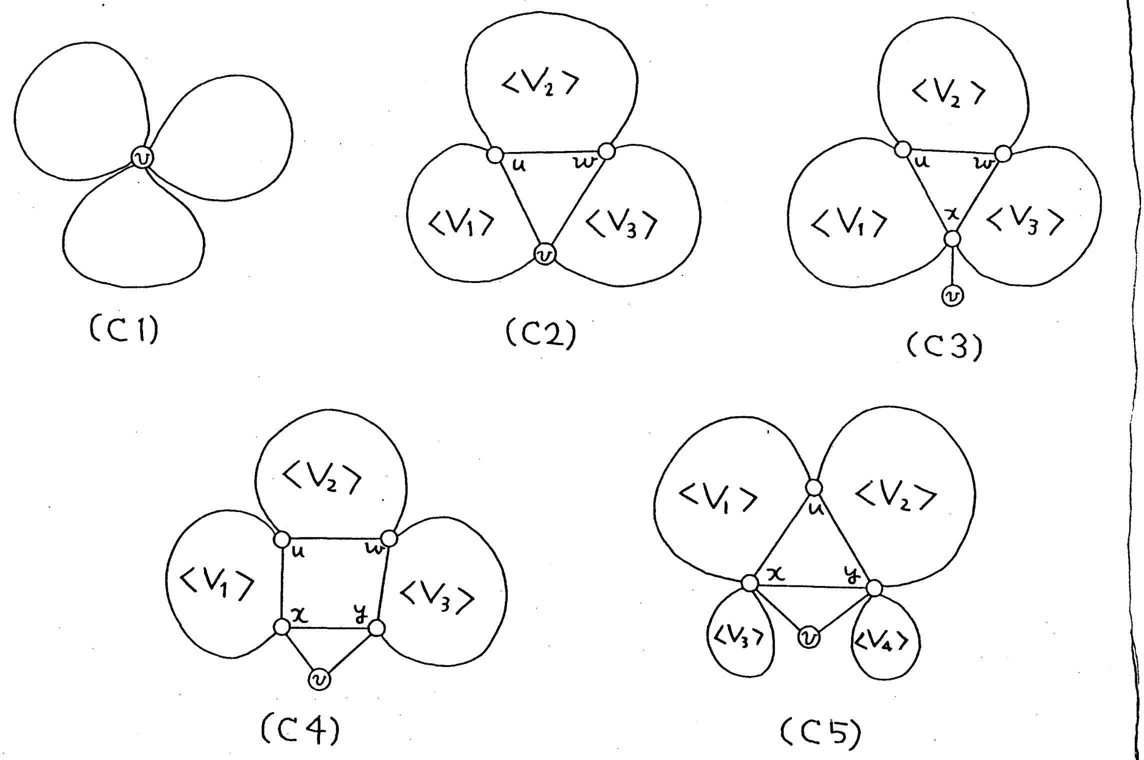
(C4) $\deg_G(v) = 2$ で，vに隣接する G の頂点を x, yとするとき，下記の条件を満たす 2 頂点 $u, w \in V(G) - \{v, x, y\}$ と分割 $V(G) - \{u, v, w, x, y\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ が存在する．

$$\begin{aligned} uy, wx &\notin E(G), \\ |V_1| \le \frac{n-3}{2} &\quad \textit{and} \quad N(V_1) - V_1 \subset \{u, x\}, \\ |V_2| \le \frac{n-3}{2} &\quad \textit{and} \quad N(V_2) - V_2 \subset \{u, w\}, \\ |V_3| \le \frac{n-3}{2} &\quad \textit{and} \quad N(V_3) - V_3 \subset \{w, y\}; \end{aligned}$$

(C5) $\deg_G(v) = 2$ で，vに隣接する G の頂点を x, yとするとき，下記の条件を満たす頂点 $u \in V(G) - \{v, x, y\}$ と分割 $V(G) - \{u, v, w, x, y\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ が存在する．

$$\begin{aligned} |V_1| \le \frac{n-3}{2} &\quad \textit{and} \quad N(V_1) - V_1 \subset \{u, x\}, \\ |V_2| \le \frac{n-3}{2} &\quad \textit{and} \quad N(V_2) - V_2 \subset \{u, y\}, \\ |V_3 \cup V_4| \le \frac{n-3}{2} &\quad \textit{and} \quad N(V_3) - V_3 \subset \{x\}, N(V_4) - V_4 \subset \{y\}. \end{aligned}$$

図1



次にこれら5タイプのグラフの十分性について調べたところ，3タイプについては証明でき，以下の定理を得た．

定理 2. 特別な1頂点 v を持つ外平面的グラフ G は，定理1における (C1), (C2), (C4) のいずれかのタイプに属するならば，性質 (*) を持つ．

ここでグラフ G が長さ4以上のサイクルを含まないならば，特別な1頂点 v をどこに指定しても G はタイプ (C1) または (C2) に属することが容易にわかる．よって次の系を得る．

定理2の系 グラフ G が長さ4以上のサイクルを含まないならば，特別な1頂点 v をどこに指定しても G は性質 (*) を持つ．

もちろん tree はサイクルを含まないので，この系は定理Bを含む．

3. 関連する補題および離散幾何の問題

定理2の証明の中で，G がタイプ (C1) である場合の証明は容易である．タイプ (C2) および (C4) の場合に用いられる補題を2つあげておく．

[3] において，P. Gritzman, B. Mohar, J. Pach, R. Pollack は次の命題を証明している．

補題 1. G は外平面的で，すべての頂点が無限面上にあるように $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれているとする．また v_1, v_2 を無限面上で隣あう G の頂点，p_1, p_2 を $\partial(\mathrm{conv}(P))$ 上で隣あう P の点とする．このとき G の P への直線埋め込み ϕ で，

$$\phi(v_1) = p_1 \quad \text{かつ} \quad \phi(v_2) = p_2$$

となるものが存在する．

補題1により，タイプ (C2) および (C4) の十分性を示すには次の主張がいえればよい．

主張 V_1, V_2, V_3 を定理1の (C2) の条件を満たす G の頂点集合とする．このとき，以下の3条件をを満たす $q_1, q_2 \in P$ と分割 $P - \{p_0, q_1, q_2\} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ が存在する．

(1) $\Delta p_0 q_1 q_2$ はその内部に P の点を含まない．

(2) 各 $i = 1, 2, 3$ に対し，$|P_i| = |V_i|$.

$$
(3)\begin{cases}
\mathrm{conv}(P_1 \cup \{p_0, q_1\}) & \cap & \mathrm{conv}(P_2 \cup \{q_1, q_2\}) & = & \{q_1\}, \\
\mathrm{conv}(P_2 \cup \{q_1, q_2\}) & \cap & \mathrm{conv}(P_3 \cup \{q_2, p_0\}) & = & \{q_2\}, \\
\mathrm{conv}(P_3 \cup \{p_2, p_0\}) & \cap & \mathrm{conv}(P_1 \cup \{p_0, q_1\}) & = & \{p_0\}.
\end{cases}
$$

この主張は本質的に離散幾何の問題であり，次の補題2のように定式化される．先に必要な定義をあげておく．

定義 2　平面上の同一直線上にない3点p, q, rに対して

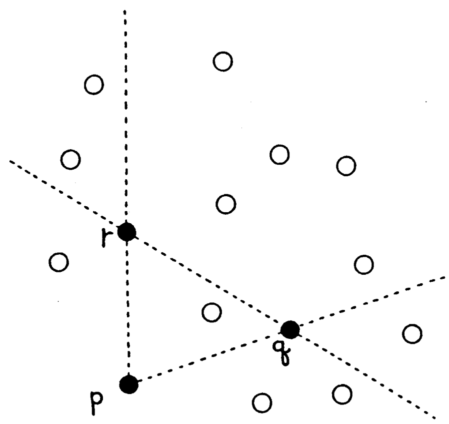
$$
\begin{aligned}
H(p; q, r) &:= \text{（直線 } qr \text{ を境界とし，} p \text{ を含む開半平面）} \\
H^c(p; q, r) &:= \text{（直線 } qr \text{ を境界とし，} p \text{ を含まない開半平面）}
\end{aligned}
$$

と定め，さらに

$$
\begin{aligned}
\alpha(p; q, r) &:= |P \cap H^c(p; q, r) \cap H(q; p, r) \cap H(r; p, q)| \\
\beta(p; q, r) &:= |P \cap H^c(p; q, r)|
\end{aligned}
$$

と定義する．（下図参照）

例：



$\alpha(p;q,r) = 5$

$\beta(p;q,r) = 8$

補題 2.　m_1, m_2, m_3を $0 \le m_1, m_3 \le \frac{n-1}{2}$, $0 \le m_2 \le \frac{n-3}{2}$, $m_1 + m_2 + m_3 = n - 3$ を満たす任意の整数とする．このとき任意の $p \in P$に対して，Δpqr の内部に Pの点を含まず，かつ次の3つの不等式を同時に成り立たせるような $q, r \in P$ が存在する．

$$
\begin{aligned}
\alpha(p; q, r) &\le m_1 \le \beta(p; q, r), \\
\alpha(q; r, p) &\le m_2 \le \beta(q; r, p), \\
\alpha(r; p, q) &\le m_3 \le \beta(r; p, q).
\end{aligned}
$$

4. 予想

定理 1 で示した必要条件は，同時に十分条件となると予想される．

予想 1. 特別な 1 頂点 vを持つ外平面的グラフ G が性質 $(*)$ を持つための必要十分条件は，G が定理 1 で示した 5 タイプの外平面的グラフのいずれかに該当することである．

Perles の問題は結局定理 2 の形に拡張された上，本質的には補題 2 という離散幾何の問題に帰着し，比較的簡明な証明を得た．そこで予想 1 についても，残るタイプ (C3),(C5) の十分性は補題 2 と同種の離散幾何の問題を解くことによって証明されるであろうと期待される．とくに p の位置がある程度 “深い” 場合については次の予想が重要な役割を果たす．ここで平面上の点 p に対して，p の（Pにおける）深さとは，p を通る直線を境界とする $\mathbb{R}^2$上の開半平面 H が含む Pの点の個数の最小値のことである．

予想 2. m_1, m_2, m_3を $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \frac{n-3}{2}$, $m_1 + m_2 + m_3 = n - 4$ を満たす任意の整数とする．また $p \in P$は深さ $m_3 + 1$ 以上とする．このとき，Δqrs の内部に Pの点を唯一 p のみ含み，かつ次の 3 つの不等式を同時に成り立たせるような $q, r, s \in P$ が存在する．

$$\begin{aligned} \alpha(q;r,s) &\leq m_1 \leq \beta(q;r,s), \\ \alpha(r;s,q) &\leq m_2 \leq \beta(r;s,q), \\ \alpha(s;q,r) &\leq m_3 \leq \beta(s;q,r). \end{aligned}$$

補題 2 および予想 2 の命題は 3 次元以上の命題へも自然に拡張でき，独立した離散幾何の問題として興味深い（と著者は思う）．

参考文献

[1] I. Fáry, On straight line representing of planar graphs, *Acta. Sci. Math.(Szeged)* **11**(1948),229-233.

[2] H. De Fraysseix, J. Pach and R. Pollack, How to draw a planar graph on a grid, *Combinatrica* **10**(1)(1990)41-51.

[3] P. Gritzman, J. Pach and R. Pollack, Embedding a planar triangulation with vertices at specified points, *Amer. Math. Monthly* 98(1991)165-166.

[4] Y. Ikebe, A. Tamura, T. Tokunaga and M. Perles, The rooted tree embedding problem into points on the plane, to appear.