数理解析研究所講究録
900巻 1995年 91-99

或る非線形常微分方程式に対する正値解の存在性

広島大・理　内 藤 学（Manabu Naito）

2階の非線形常微分方程式

(1) $$x'' + p(t)f(x) = 0, \quad t \ge t_0,$$

を考える。ここで、

(2) $$p \in C[t_0, \infty), \quad p(t) \ge 0 \text{ for } t \ge t_0,$$

(3) $$f \in C(0, \infty), \quad f(x) > 0 \text{ for } x > 0,$$

と仮定する。我々は、方程式 (1) に対する正値解 $x(t)$, $x(t) > 0$ on $[t_1, \infty)$ for some $t_1 \ge t_0$, の存在性について議論する。 $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ の場合に知られている重要な結果をまとめてみよう。

定理 F1　$f(x) = x^{\alpha}$ とする。

(i)　$\alpha > 1$ のとき、(1) が正値解 $x(t) > 0$ $(t \ge \exists t_1)$ をもつための必要十分条件は $\int_{t_0}^{\infty} tp(t)dt < \infty$ が成立することである (Atkinson [1])；

(ii)　$\alpha < 1$ のとき、(1) が正値解 $x(t) > 0$ $(t \ge \exists t_1)$ をもつための必要十分条件は $\int_{t_0}^{\infty} t^{\alpha}p(t)dt < \infty$ が成立することである (Belohorec [2] 等)。

$\boxed{\text{定理 F 2}}$ $f(x) = x$ とする。このとき、$\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt = \infty$ ならば、(1) は正値解をもたない (Fite [3])。

従って、残る場合は、$f(x) = x$ かつ $\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt < \infty$ の場合であるが、この場合は次の形の比較定理が成立する。

$\boxed{\text{定理 F 3}}$ 二つの微分方程式

$$x'' + p_1(t)x = 0 \tag{4}$$

$$y'' + p_2(t)y = 0 \tag{5}$$

を考える。ここで、$p_i \in C[t_0, \infty)$, $p_i(t) \geq 0$ for $t \geq t_0$ $(i = 1, 2)$ かつ

$$\int_{t}^{\infty} p_1(s)ds \leq \int_{t}^{\infty} p_2(s)ds < \infty, \quad t \geq t_0,$$

とする。このとき、(5) が正値解 $y(t)$ をもてば、(4) も正値解 $x(t)$ をもつ (Hille [4])。

オイラーの方程式

$$x'' + \frac{\lambda}{t^2}x = 0, \quad t \geq 1, \quad (\lambda > 0 : \text{定数}) \tag{6}$$

は、$0 < \lambda \leq 1/4$ ならば正値解をもち、$\lambda > 1/4$ ならば正値解をもたない。従って、方程式 (6) と

$$x'' + p(t)x = 0 \tag{7}$$

に対して、定理 F 3 を適用して次の定理の (i) および (ii) が得られる。また、(iii) も容易に得られる：

$\boxed{\text{定理 F 4}}$ (2) を仮定する。また、$\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt < \infty$ とし、

$$Q(t) = t\int_t^{\infty} p(s)ds, \quad t \geq t_0,$$

と定める。このとき、

(i) $\limsup_{t\to\infty} Q(t) < \frac{1}{4}$ ならば、(7) は正値解をもつ；

(ii) $\liminf_{t\to\infty} Q(t) > \frac{1}{4}$ ならば、(7) は正値解をもたない；

(iii) $\limsup_{t\to\infty} Q(t) > 1$ ならば、(7) は正値解をもたない。 (Hille [4])

定理Ｆ４の (i) と (iii) を使えば、パラメータ $\lambda > 0$ を含む方程式

$$(8_\lambda) \qquad x'' + \lambda p(t)x = 0 \quad (\lambda > 0：パラメータ)$$

に対して次がわかる。

$\boxed{\text{定 理 Ｆ５}}$ 定理Ｆ４と同じ仮定・記号のもとで、

(i) $\limsup_{t\to\infty} Q(t) = 0$ ならば、任意の $\lambda > 0$ 対して、(8_λ) は正値解をもつ；

(ii) $0 < \limsup_{t\to\infty} Q(t) < \infty$ ならば、次をみたす $\lambda_0 > 0$ が存在する：

$$\begin{cases} 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対して、} (8_\lambda) \text{ は正値解をもつ，} \\ \lambda > \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対して、} (8_\lambda) \text{ は正値解をもたない；} \end{cases}$$

(iii) $\limsup_{t\to\infty} Q(t) = \infty$ ならば、どんな $\lambda > 0$ に対しても、(8_λ) は正値解をもたない。 (Nehari [6])

上述の結果、定理Ｆ１～Ｆ５、は非線形項 $f(x)$ を $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ と限定して、(1) が正値解をもつための、$p(t)$ についての条件を求めたものと思える。一方、係数 $p(t)$ を $p(t) = t^\beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$ と限定して、(1) が正値解をもつための、$f(x)$ についての条件を求める研究もある。

$\boxed{\text{定理 P 1}}$ $p(t) = t^{\beta}$ とする。

(i) $\beta < -2$ のとき、(1) は必ず正値解をもつ；

(ii) $\beta > -2$ のとき、(1) が正値解をもつための必要十分条件は $\int_1^{\infty} x^{\beta} f(x)\,dx < \infty$ が成立することである。 (Naito [5])

最近、筆者は、$\beta = -2$ のとき、定理F 3～F 5 に対応して、以下の定理P 3～P 5 が成立することを明らかにした。

$\boxed{\text{定理 P 3}}$ 二つの微分方程式

$$x'' + \frac{1}{t^2} f_1(x) = 0 \tag{9}$$

$$y'' + \frac{1}{t^2} f_2(y) = 0 \tag{10}$$

を考える。ここで、$f_i \in C(0, \infty)$, $f_i(x) > 0$ for $x > 0$ $(i = 1, 2)$ かつ $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ なる適当な点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\int_{x_n}^{x} f_1(y)\,dy \le \int_{x_n}^{x} f_2(y)\,dy, \qquad x \ge x_n,$$

とする。このとき、(10) が正値解 $y(t)$ をもてば、(9) も正値解 $x(t)$ をもつ。

従って、方程式

$$x'' + \frac{1}{t^2} f(x) = 0 \tag{11}$$

に対して次が得られる。

$\boxed{\text{定理 P 4}}$ (3) を仮定し、

$$G(x) = \frac{1}{x^2} \int_1^{x} f(y)\,dy, \qquad x \ge 1,$$

と定める。このとき、

(i) $\limsup_{x\to\infty} G(x) < \dfrac{1}{8}$ ならば、(11) は正値解をもつ；

(ii) $\liminf_{x\to\infty} G(x) > \dfrac{1}{8}$ ならば、(11) は正値解をもたない；

(iii) $\limsup_{x\to\infty} G(x) > \dfrac{1}{2}$ ならば、(11) は正値解をもたない。

定理P４の (i) と (iii) を使えば、パラメータ $\lambda > 0$ を含む方程式

$$(12_\lambda) \qquad x'' + \frac{\lambda}{t^2} f(x) = 0 \qquad (\lambda > 0 : \text{パラメータ})$$

に対して次がわかる。

$\boxed{\text{定理P５}}$ 定理P４と同じ仮定・記号のもとで、

(i) $\limsup_{x\to\infty} G(x) = 0$ ならば、任意の $\lambda > 0$ 対して、(12_λ) は正値解をもつ；

(ii) $0 < \limsup_{x\to\infty} G(x) < \infty$ ならば、次をみたす $\lambda_0 > 0$ が存在する：

$$\begin{cases} 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対して、} (12_\lambda) \text{ は正値解をもつ，} \\ \lambda > \lambda_0 \text{ なる } \lambda \text{ に対しては、} (12_\lambda) \text{ は正値解をもたない；} \end{cases}$$

(iii) $\limsup_{x\to\infty} G(x) = \infty$ ならば、どんな $\lambda > 0$ に対しても、(12_λ) は正値解をもたない。

以下、定理P３の証明を述べる。そのため、次の補題を用意しておく。

$\boxed{\text{補題}}$ (3) を仮定する。このとき、

(i) 方程式 (11) の正値解 $x(t) > 0$ $(t \geq {}^\exists t_1)$ は次を満たす：

$$x'(t) > 0 \quad \text{for } t \geq t_1 ;$$

$$x(t) \geq x(t_1) + x'(t)(t - t_1) \quad \text{for } t \geq t_1 ;$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty ;$$

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = \ell \quad \text{for some } \ell \in [0, \infty).$$

(ii) 方程式 (11) が

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = \ell \quad \text{for some } \ell \in (0, \infty)$$

となるような正値解 $x(t)$ をもつための必要十分条件は

$$\int_1^\infty \frac{1}{y^2} f(y)\, dy < \infty$$

が成立することである。 (Naito [5] 参照)

《定理P 3の証明》 二つの場合に分けて考える。

場合1. $\int_1^\infty \frac{1}{y^2} f_2(y)\, dy < \infty$ の場合。

この場合、簡単な計算によって、

$$\int_1^\infty \frac{1}{y^2} f_1(y)\, dy < \infty$$

であることがわかる。従って、補題の (ii) によって、方程式 (9) は $\lim_{t\to\infty} x'(t) = \ell$ for some $\ell \in (0, \infty)$ となるような正値解 $x(t)$ をもつ。

場合2. $\int_1^\infty \frac{1}{y^2} f_2(y)\, dy = \infty$ の場合。

この場合、補題の (i) および (ii) によって、(10) の正値解 $y(t)$ は

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty \quad かつ \quad \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$$

を満たすことがわかる。さて、$w(r) = y(e^r)$ とすると、$w(r)$ は自励系の方程式

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{dw}{dr} + f_2(w) = 0$$

を満たす。さらに、

(13) $$\varphi(r) = w(r) - \frac{dw}{dr}(r)$$

とすると、

(14) $$\frac{d\varphi}{dr}(r) = f_2(w(r))$$

であり、補題の (i) によって、$\varphi(r) > 0$ (r:十分大) であることがわかる。

$\frac{dw}{dr}(r) > 0$, $w(r) \to \infty$ $(r \to \infty)$ であるから、$r \in [r_*, \infty)$ と $w \in [w_*, \infty)$ は 1 対 1 に対応していることに注意して（ここで、r_*, w_* は十分大)、独立変数を w に替えて考える。(13) と (14) より

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{d\varphi/dr}{dw/dr} = \frac{f_2(w)}{w - \varphi}$$

すなわち

(15) $$(w - \varphi)\frac{d\varphi}{dw} = f_2(w).$$

この式を $[w_*, w]$ 上積分して整理すると

(16) $$\varphi(w) = \frac{1}{w}\left\{ c + \int_{w_*}^{w}\varphi(\rho)\,d\rho + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 + \int_{w_*}^{w} f_2(\rho)\,d\rho \right\},$$

ここで、$c = \varphi(w_*)\left\{w_* - (1/2)\,\varphi(w_*)\right\} > 0$. 定理Ｐ３の命題中の x_n で $x_n \geq w_*$ となるものを固定し、それを w_0 と置く。このとき、(16) より、

$$\varphi(w) = \frac{1}{w}\left\{ d + \int_{w_0}^{w}\varphi(\rho)\,d\rho + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 + \int_{w_0}^{w} f_2(\rho)\,d\rho \right\}, \quad w \geq w_0,$$

ここで、$d > 0$ は定数。

新たに、$\phi = \phi(w)$ についての方程式

$$\phi(w) = \frac{1}{w}\left\{ d + \int_{w_0}^{w}\phi(\rho)\,d\rho + \frac{1}{2}[\phi(w)]^2 + \int_{w_0}^{w} f_1(\rho)\,d\rho \right\}, \quad w \geq w_0,$$

を考えると、この方程式は

$$0 < \phi(w) \leq \varphi(w), \quad w \geq w_0,$$

なる解 $\phi(w)$ をもつことがわかる（例えば、第一段関数として $\varphi(w)$ を取った逐次近似法を用いる)。$\phi(w)$ は

(17) $$(w - \phi)\frac{d\phi}{dw} = f_1(w)$$

を満たしている。さて、この ϕ と、$v_0 > w_0$ となる v_0 に対して、$v = v(r)$ についての初期値問題

$$
(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dr} = v - \phi(v) \\ v(1) = v_0 \end{cases}
$$

を考える。(18) は $[1, \infty)$ 上で一意な解 $v(r)$ をもち、$v(r) > 0$, $\dfrac{dv}{dr}(r) > 0$ for $r \geq 1$, であることが簡単に示せる。(17) と (18) によって、

$$
\frac{d^2v}{dr^2} - \frac{dv}{dr} + f_1(v) = 0
$$

であり、このことから、$x(t) = v(\log t)$ は (9) の正値解になっていることが容易にわかる。（証明終）

注意　我々は定理P３～P５を (11) の形の方程式に対する結果として述べてきたが、もちろん、それらは

$$
x'' - x' + f(x) = 0
$$

の形の方程式に対するものとみなしてもよい。

References

[1] F. V. Atkinson, On second-order nonlinear oscillations, Pacific J. Math., 5(1955), 643-647.

[2] Š. Belohorec, Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order, Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied., 11(1961), 250-255.

[3] W. B. Fite, Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 19(1918), 341-352.

[4] E. Hille, Nonoscillation theorems, Trans. Amer. Math. Soc., **64**(1948), 234–252.

[5] M. Naito, Positive solutions of nonlinear differential inequalities, Hiroshima Math. J., 9(1979), 769–785.

[6] Z. Nehari, Oscillation criteria for second-order linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **85**(1957), 428–445.