数理解析研究所講究録
901 巻 1995 年 24-29

Sequential order of product spaces

愛媛大学理学部　野倉　嗣紀 (Tsugunori Nogura)

位相空間 X に対し, sequential order $so(X)$ が次のように定義される。

$$so(X) = \min\{\alpha \in \omega_1 + 1 : \overline{A} = [A]_\alpha \text{ for every } A \subset X\}$$

ここで $\overline{A}$ は集合 A の閉包, $[A]_\alpha$ は次のように帰納的に定義される。$[A]_0 = A$, $[A]_1 = \{x \in X : A$ の点列で x に収束するものがある。$[A]_{\alpha+1} = [[A]_\alpha]_1$, α が極限順序数のときは $[A]_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} [A]_\beta$。

次の van Douwen - Tanaka [2], [5] の定理が示すように, sequential 空間の積は sequential にはなり難いことがわかる.

<u>Theorem</u> (van Douwen - Tanaka). S_ω を sequential fan とする. $S_\omega \times X$ が sequential になる必要十分条件は X が locally countably compact sequential なことである。

$so(X)$は次のようにすれば、一般の位相空間Xに対しても、定義される. $S[X]$でXに次のような新しい位相を導入したものを表すことにする: $A \subset X$が$S[X]$で閉集合とは、Xの任意のcompact metric subset Kに対し$A \cap K$がKで閉集合。

このとき新しい位相$S[X]$はsequentialになる。そこで

$$so(X) = so(S[X])$$

で定義する。

この小論ではsequential space (又は特別な場合として、Fréchet space) X, Yに対し$so(X)$, $so(Y)$と$so(X \times Y)$の関係を検べる。特に$so(X \times Y) \leq so(X) + so(Y)$が成立するときproduct theoremが成立する。という。

§1. sequential orderに関するproduct theorem

<u>Theorem 1.1.</u> Xがsequential space, Yはregular locally countably compact sequential space. そのとき$X \times Y$はsequentialになり更にproduct theoremが成立する.

Xがsequential, Yが第一可算空間としても$X \times Y$がsequentialとは限らないが次のproduct theoremが成立する。

Theorem 1.2. X が sequential space, Y が第一可算空間とする.
そのとき $so(S[X \times Y]) \leq so(X) + 1$.

X の部分集合の collection $\mathcal{P}$ が k-network とは X の compact 部分集合 K と開集合 $U \supset K$ に対し $\mathcal{P}$ の有限部分集合 $\mathcal{P}_K$ で $K \subset \cup \mathcal{P}_K \subset U$ となるものがとれる。

Theorem 1.3. X, Y を point-countable k-network を持つ Fréchet 空間とする。そのとき $X \times Y$ は sequential ならば product theorem が成立する. つまり $so(X \times Y) \leq 2$.

上の定理で $X \times Y$ が sequential であるという仮定の代わりに $so(S[X \times Y]) \leq 2$ が成立することが望ましいが, 次のような example を構成できる.

Example 1.4 point-countable k-network を持つ Fréchet 空間 X, Y で $so(S[X \times Y]) = 3$ となるものがある。

§2. Fréchet 空間 X と Y で $so(X\times Y)=\alpha$ となる例

<u>Lemma. 2.1 (CH)</u> X を可算 k_ω-space とする。X にもとの位相より弱い位相 τ_1 と τ_2 が導入され

(1) X は $(X,\tau_1)\times(X,\tau_2)$ に closed に埋め込める。

(2) $(X,\tau_1)\times(X,\tau_2)$ は sequential

とできる。

このLemma より Fréchet 空間 X, Y で $X\times Y$ は sequential $so(X\times Y)\geq\alpha$. となるものが構成できる 特に Fréchet space X, Y で $so(X\times Y)=\omega_1$ となるものの存在が保障される。

位相空間 X が scattered とは任意の空でない閉部分集合が孤立点をもつものとする。$X^0=X\setminus\{X$ の isolated points$\}$ $X^{\alpha+1}=X^\alpha\setminus\{X^\alpha$ の isolated points$\}$, $X^\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}X^\beta$ と定義する。X が scattered ならば或る順序数 α で $X^\alpha=\phi$ となる。$Cd(X)=\min\{\alpha : X^\alpha=\phi\}$ と定め Cantor degree とよぶことにする。

<u>Lemma. 2.2.</u> X を sequential scattered とする。そのとき

$$so(X)\leq Cd(X).$$

<u>Lemma. 2.3.</u> 任意の順序数 $\alpha \leq \omega_1$ に対し Arhangelskii-Franklin space [1] X_α で $Cd(X_\alpha) = so(X_\alpha)$ となるものが存在する。

<u>Lemma 2.4.</u> $f: X \to Y$ を 1:1, 連続 上への写像とする. 今. Y が scattered とすると. $Cd(X) \leq Cd(Y)$ が成立。

<u>Lemma. 2.5. (CH)</u> X を可算 k_ω- space. $Y = (X, \tau_1)$, $Z = (X, \tau_2)$ τ_1, τ_2 は Lemma. 2.1. で存在が保障された位相とする。そのとき適当に構成すれば次の (*) をみたすようにできる。

(*).

任意の $A \subset Y \times Z$, $x \in Y \times Z$ で $x \in [A]_\beta^{Y \times Z}$ かつ $x \notin [A]_\gamma^{Y \times Z}$ ここで $\gamma < \beta$ とする. そのとき. $B \subset Y \times Z$ で $x \in [B \cap A]_\beta^B$ かつ $\pi_Y | B$ 又は $\pi_Z | B$ が 1:1.

$x \in [A]_\beta^{Y \times Z}$ で $x \notin [A]_\gamma^{Y \times Z}$ $\gamma < \beta$ とする。そのとき. $B \subset Y \times Z$ で 上の条件をみたすものとする. 今 $\pi_Y | B$ が 1:1 とすれば $\beta \leq Cd(B) \leq Cd(Y) = \alpha$ となり, $so(Y \times Z) \leq \alpha$ が成立する. Lemma. 2.1 と合せれば次の定理を得る。

Theorem 2.6 (CH). 任意の順序数 $\alpha \leq \omega_1$ に対し Fréchet 空間 Y, Z で $so(Y \times Z) = \alpha$ となるものが存在する。

References.

[1]. A.V. Arhangelskii - S.P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces, Michigan Math. J. 15 (1968) 313-320.

[2] E.K. van Douwen, The product of a Fréchet spaces and a metrizable spaces, Topology and Appl. 47 (1992) 163-164.

[3]. J. Nogura - A. Shibakov, Sequential order of product spaces., Topology and Appl. (to appear)

[4]. J. Nogura - A. Shibakov, Sequential order of product spaces II, (in preparation).

[5] Y. Tanaka, Products of sequential spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976) 371-375.