数理解析研究所講究録
905巻 1995年 41-56



# Schrödinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields

阪大理　吉富　和志 (Kazushi Yositomi)

## 1 Introduction and main results

考える作用素は、ポテンシャルが周期的な定数磁場のSchrödinger 作用素

$$H(\lambda) = (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x) \quad in \quad L^2(\mathbf{R}^2)$$

である。ただし $D_{x_j} = -i\,\partial/\partial x_j$ $(j = 1,2)$, $\lambda$は正のパラメータ、$b \in \mathbf{R}$は定数とする。$H(\lambda)$に対応する磁場は$B = -2b\, dx_1 \wedge dx_2$である。ポテンシャル$V(x)$には次の仮定をおく。

$(H.1)$ $V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$

$(H.2)$ $V(x+\gamma) = V(x)$ $in$ $\mathbf{R}^2$ $for\ any$ $\gamma \in \Gamma := 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$

$(H.3)$ $V(x) \geq 0$ $in$ $\mathbf{R}^2$

$(H.4)$ $V(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \Gamma$

$(H.5)$ $V''(x) = 2\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0$

Direct integral decomposition を用いるために、磁場Bに次の仮定をおく。

$(H.6)$ $\langle B, \Gamma \wedge \Gamma \rangle \subset 2\pi\mathbf{Z}$ $i.e.$ $b \in \frac{1}{4\pi}\mathbf{Z}$

この仮定により$H(\lambda)$のスペクトルはバンド構造を持つ。研究の目標は、$\lambda \to \infty$ としたときの$H(\lambda)$のスペクトルの漸近挙動を調べることである。磁場の

無い場合(すなわち、b=0の場合)に、B.Simon [1]と、A.Outassout[2]はground state bandの幅がexponential orderで減少することを示した。Simonはその証明に確率論的な方法を用い、OutassoutはB.Helffer-J.Sjöstrand [3]らによるWKB解析による方法を用いている。今回の研究では、磁場のある場合に、ground state band の幅に対する exponential order の評価を得た。以下その内容を簡単に述べる。

$d_V(x,y)$ を V(x)に対応する Agmon distance、$s_0 := \min_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} d_V(0,\gamma) \ (>0)$,

$x_0 \in \mathbf{R}^2, r>0$ に対し $B_V(x_0,r) := \{x\in\mathbf{R}^2 : d_V(x_0,x)<r\}$ とおく。

<u>*Theorem A*</u> (H.1)から(H.6)を仮定する。このとき、$^\forall\eta>0$ に対し$H(\lambda)$の ground state bandの幅はO$(e^{-(s_0-2\eta)\lambda})$ (as $\lambda\to\infty$) である。

幾何学的な仮定を付け加えれば、Theorem Aの評価は次のように精密化される。

$\Lambda := \{\gamma\in\Gamma : d_V(0,\gamma)=s_0\}$ とおく。 $\gamma\in\Lambda$ に対し次を仮定する。

(H.7) There is a unique geodesic $\kappa$ of length $s_0$ joining 0 and $\gamma$.

(H.8) $x_0 \in \kappa\cap B_V(0,s_0)\cap B_V(\gamma,s_0)$

$\Gamma_0 \subset\subset B_V(0,s_0)\cap B_V(\gamma,s_0)$: smooth curve which intersects $\kappa$ transversally at $x_0$ where $x_0$ is the only point in $\overline{\Gamma_0}\cap\kappa$

$\Rightarrow \exists C>0$ s.t.

$$d_V(x,0)+d_V(x,\gamma) \ge s_0 + C d_V(x,x_0)^2 \quad for\ any\ x\in\Gamma_0$$

<u>*Theorem B*</u> (H.1)から(H.8)を仮定する。このとき、$H(\lambda)$ のground state bandの幅は $(b_0\lambda^{\frac{3}{2}}+O(\lambda^{\frac{1}{2}}))\,e^{-s_0\lambda}$ $(as\ \lambda\to\infty)$ である。ただし $b_0>0$ : independent of $\lambda$

以下でこれらの証明の概略を述べる。

# 2 Preliminaries

$\Gamma = 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$のfundamental domain を E, $\Gamma$のdual latticeを$\Gamma^*$ , $\Gamma^*$の fundamental domain を $E^*$とする。すなわち、$E = [0,2\pi) \times [0,2\pi)$ ,
$\Gamma^* := \{\gamma^* \in \mathbf{R}^2 \ : \ \gamma \cdot \gamma^* \in 2\pi\mathbf{Z} \ ^\forall\gamma \in \Gamma\} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , $E^* = [0,1) \times [0,1)$
とする。

$H^2_B(\mathbf{R}^2) := \{u \in L^2(\mathbf{R}^2) : T_i u, T_i T_j u \in L^2(\mathbf{R}^2) \ ^\forall i,j \in \{1,2\}\}$
$,T_1 := D_{x_1} + bx_2$ , $T_2 := D_{x_2} - bx_1$ とおいて,
$Dom(H(\lambda)) := H^2_B(\mathbf{R}^2)$と定義する。$H(\lambda)$はself-adjointである。
$H^2_B(\mathbf{R}^2)$に内積を

$$(u,v)_{H^2_B(\mathbf{R}^2)} := (u,v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i=1}^{2}(T_i u, T_i v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i,j=1}^{2}(T_i T_j u, T_i T_j v)_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

$(u,v \in H^2_B(\mathbf{R}^2)$ )で定義する。

$^\forall\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma$ , $u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^2)$に対し

$$(\mathbf{T}^B_\gamma u)(x) := e^{ib\gamma_1\gamma_2} e^{-ib(x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)} u(x-\gamma),$$

$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ , $\theta \in E^*$に対し

$$(\mathcal{U}u)(x,\theta) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}^B_\gamma u)(x) \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

とおく。
$\theta \in E^*$に対し
$\mathcal{H}_{B,\theta} := \{v \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^2) \ : \ \mathbf{T}^B_\gamma v = e^{-i\gamma\cdot\theta} v \ \ a.e. \ in \ \mathbf{R}^2 \ ^\forall\gamma \in \Gamma\}$
$\mathcal{H}^2_{B,\theta} := \{v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \ : \ T_i v, T_i T_j v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \ ^\forall i,j \in \{1,2\}\}$と定義する。
$\mathcal{H}_{B,\theta}$に内積を $(u,v)_{\mathcal{H}_{B,\theta}} := \int_E u(x)\overline{v(x)}dx$ $,u,v \in \mathcal{H}_{B,\theta}$で定義する。
$\theta \in E^*$に対し
$H(\lambda;\theta) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x) \ in \ \mathcal{H}_{B,\theta} \ with \ domain \ \mathcal{H}^2_{B,\theta}$
と定義する。

*Proposition* 2.1
$\mathcal{U}$は$L^2(\mathbf{R}^2)$から$\int_{E^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$へのunitary operatorに一意に拡張され、次が成り立つ

(2.1) $\mathcal{U}H(\lambda)\mathcal{U}^{-1} = \int_{E^*}^{\oplus} H(\lambda,\theta)d\theta$

ただし$\mathcal{H} := \int_{E^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$の内積は

$$(u, v)_{\mathcal{H}} := (volE^*)^{-1} \int_{E^*} \int_E u(x,\theta)\overline{v(x,\theta)} dx d\theta \quad (u, v \in \mathcal{H})$$

で定義する。

$H(\lambda,\theta)$は正定値でcompact resolventをもつので、spectrumはpurely discreteである。$H(\lambda,\theta)$の多重度を込めて下からj番目の固有値を$\mathcal{E}_j(\lambda,\theta)$とする。$\mathcal{E}_j(\lambda,\theta)$は$\theta$の連続関数であるから、次が成り立つ。

$$(2.2) \quad \sigma(H(\lambda)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) \quad \text{ただし} \quad \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) := \{\mathcal{E}_j(\lambda;\theta) \ : \ \theta \in E^*\}$$

$\mathcal{E}_j(\lambda; E^*)$は閉区間または1点集合で、$\mathcal{E}_j(\lambda; E^*)$をj-th band、$\mathcal{E}_1(\lambda; E^*)$をground state bandという。従って$H(\lambda)$のspectrumの解析は$\mathcal{E}_j(\lambda;\theta)$の解析に帰着される。

$\Lambda_0 := \{\ (2j+1)\sqrt{\mu_1} + (2k+1)\sqrt{\mu_2} \ : \ j,k \geq 0 \ ; \ integers\}$とおき、$\Lambda_0$の元で重複度を込めて$n$番目に小さい元を$v_n$とする。このとき次の定理が得られる。

<u>*Theorem 2.2*</u>

$^\forall n \in \mathbf{N}$ , $n \geq 1$に対し$\mathcal{E}_n(\lambda;\theta) = v_n\lambda + o(\lambda) \quad (\lambda \to \infty)$
ただしerror term は$\theta \in E^*$に関し一様である。

<u>*Outline of proof*</u>

この定理の証明にはHarmonic approximation を用いる(cf.[1])。

(H.6)より$V(x) = \mu_1 {x_1}^2 + \mu_2 {x_2}^2 + O(|x|^3) \quad (as\ |x| \to 0)$である。
(1.1)でV(x)を$\mu_1 {x_1}^2 + \mu_2 {x_2}^2$で置き換えた次の作用素:

$$(2.3) H_0(\lambda) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2(\mu_1 {x_1}^2 + \mu_2 {x_2}^2) \ \ in \ \ L^2(\mathbf{R}^2)$$

の固有値、固有関数を用いて各$\mathcal{E}_j(\lambda;\theta)$を近似する。
$H_0(\lambda)$はWeyl擬微分作用素の正準変換による不変性を用いると、次のHarmonic oscillatorとunitary同値になる。(see Appendix)

$$(2.4) \quad -\Delta + m_1(\lambda){x_1}^2 + m_2(\lambda){x_2}^2 \quad in \ \ L^2(\mathbf{R}^2)$$

ただし$m_1(\lambda), m_2(\lambda)$はtに関する2次方程式

$$t^2 - ((\mu_1+\mu_2)\lambda^2 + 4b^2)t + \mu_1\mu_2\lambda^4 = 0$$

の解で、$m_1(\lambda) < m_2(\lambda)$を満たすものとする。

よって$H_0(\lambda)$のeigenvalueは $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)}+(2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$, $(j,k\geq 0; integers)$で、

$$v_{j,k} := \begin{cases} (2j+1)\sqrt{\mu_1}+(2k+1)\sqrt{\mu_2} & (\mu_2 \geq \mu_1) \\ (2j+1)\sqrt{\mu_2}+(2k+1)\sqrt{\mu_1} & (\mu_2 \leq \mu_1) \end{cases}$$

とおけば $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)}+(2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)} = v_{j,k}\lambda + O(1) \quad (as\ \lambda \to \infty)$ である。

$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)}+(2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$に対応する$H_0(\lambda)$の固有関数を$\psi_{j,k}(\lambda;x)$ $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\geq 0}$ : $C.O.N.S.\ in\ L^2(\mathbf{R}^2)$とする。$\psi_{j,k}$は具体的に計算でき次が成り立つ。

(2.5) $|\psi_{j,k}(\lambda;x)| \leq C_{j,k}\lambda^{\frac{1}{2}}exp(-c\lambda|x|^2)$ , $(C_{j,k}, C > 0 : const.\ indep.\ of\ \lambda)$
である。

$v_n = v_{j_n,k_n} \quad (n = 1,2,\cdots)$ , $(j_n,k_n) \neq (j_m,k_m)\ \ if\ \ n \neq m$
とおける。

$\psi_n := \psi_{j_n,k_n}$ , $\varphi_n(\lambda;x;\theta) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B\psi_n)(\lambda;x) \quad (\theta \in E^*)$とおく。

(2.5)より次がなりたつ。

(2.6) $(\varphi_n(\lambda;x;\theta), \varphi_m(\lambda;x;\theta))_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = \delta_{nm} + O(e^{-c\lambda}) \ \ (as\ \ \lambda \to \infty)$

(2.7) $(H(\lambda;\theta)\varphi_n(\lambda;x;\theta), \varphi_m(\lambda;x;\theta))_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = v_n\lambda\delta_{nm} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \ \ (as\ \ \lambda \to \infty)$
ただし各error termは$\theta \in E^*$に関し一様である。

Schmidtの直交化法と、Rayleigh-Ritz Principleを用いて
$\mathcal{E}_n(\lambda;\theta) \leq v_n\lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}})$を得る。

また、Simon[1]と同様にI.M.S. localization formulaを用いれば
$\mathcal{E}_n(\lambda;\theta) \geq v_n\lambda - O(\lambda^{\frac{4}{5}})$を得る。□

# 3 0utline of Proof of Theorem A

この章ではTherem Aの証明の概略を説明する。まず、$d_V(x,y)$の定義を正確に述べる。

$x, y \in \mathbf{R}^2$に対し、

$d_V(x,y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t))}\, |\dot{\gamma}(t)| dt$

ただし、$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ ; *piecewise* $C^1$ *path s.t.* $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$

と定義する。

$x_0 \in \mathbf{R}^2$ , $r > 0$に対し $B_V(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2 \ : \ d_V(x_0, x) < r\}$ ,
$s_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma)$ $(> 0)$とおく。

$\eta > 0$ :十分小 に対し $W_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$として
$W_\eta = 1$ *on* $B_V(0, \frac{\eta}{4})$ , $W_\eta \geq 0$ *in* $\mathbf{R}^2$ , *supp* $W_\eta \subset B_V(0, \frac{\eta}{2})$
を満たすものを選ぶ。

$\widetilde{V}(x) := V(x) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} W_\eta(x - \gamma)$とおく。

$\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ $(\theta \in E^*)$を近似するために次の作用素を導入する:

$$\widetilde{H}(\lambda) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 \widetilde{V}(x) \ \ in \ \ L^2(\mathbf{R}^2) \quad \text{with domain } H_B^2(\mathbf{R}^2) \tag{3.1}$$

§2とほぼ同様にして次のことが判る。 $^\forall n \in \mathbf{N}$ , $n \geq 1$に対し$\widetilde{H}(\lambda)$は十分大きい$\lambda$に対して、その essential spectrum の下に少なくとも n 個の固有値をもち、$\widetilde{H}(\lambda)$の多重度を込めて j 番目の固有値は $v_j\lambda + o(\lambda)$ $(as\ \lambda \to \infty)$ である。

$\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)$を$\widetilde{H}(\lambda)$の first eigenvalue ($\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) = (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})\lambda + o(\lambda)$) , $\widetilde{\phi}(\lambda)(x)$を$\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)$に対応する$\widetilde{H}(\lambda)$の eigenfunctionで、$\|\widetilde{\phi}(\lambda)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 1$ とする。
Helffer-Sjöstrand [2] とほぼ同様に、$\widetilde{\phi}(\lambda)$は次の decay estimate を満たす:

<u>*Lemma* 3.1</u> $^\forall \varepsilon > 0$に対し

$$\| e^{\lambda(1-\varepsilon) d_{\widetilde{V}}(x,0)} \widetilde{\phi}(\lambda)(x) \|_{H_B^2(\mathbf{R}^2)} = O(e^{\varepsilon\lambda}) \quad (as\ \lambda \to \infty) \tag{3.2}$$

さらに、楕円型作用素に対する a priori estimate と Sobolev の埋込定理を用いて次が得られる。

<u>*Lemma* 3.2</u> $^\forall \varepsilon > 0$ , $^\forall \alpha \in \mathbf{N}^2$ $^\exists C_{\alpha,\varepsilon} > 0$ : *const. s.t.*

$$| \partial_x^\alpha \widetilde{\phi}(\lambda)(x) | \leq C_{\alpha,\varepsilon} e^{-\lambda(d_{\widetilde{V}}(x,0) - \varepsilon)} \ \ in \ \ \mathbf{R}^2$$

$\chi_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$として、

$supp\ \chi_\eta \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$ , $0 \leq \chi_\eta \leq 1\ in\ \mathbf{R}^2$ , $\chi_\eta = 1\ on\ B_V(0, s_0 - \eta)$

を満たすものを選ぶ。

$\widetilde{\psi}(\lambda)(x) := \chi_\eta(x)\widetilde{\phi}(\lambda)(x)$とおく。

$\theta \in E^*$に対し　$\widetilde{\psi}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B \widetilde{\psi})(x)$ $(\in \mathcal{H}_{B,\theta} \cap C^\infty(\mathbf{R}^2)\ )$

とおいて、次を得る。

$$(3.3)\quad H(\lambda;\theta)\widetilde{\psi}_\theta(\lambda) = \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)\widetilde{\psi}_\theta(\lambda) + \widetilde{r}_\theta(\lambda)$$

ただし、$\widetilde{r}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B \widetilde{r}(\lambda)\ )(x)$,

$$\widetilde{r}(\lambda) := -\triangle\chi_\eta\widetilde{\phi} - 2\nabla\chi_\eta \cdot \nabla\widetilde{\phi} - 2bi(\ (x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2})\chi_\eta)\widetilde{\phi}$$

(3.2),(3.3)を用いて次の評価を得る。

$$(3.4)\quad \|\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = 1 + O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}),$$

error termは$\theta \in E^*$に関しuniform.

$$(3.5)\quad \|\widetilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)})$$ , error termは$\theta \in E^*$に関しuniform.

したがって、$dis(\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda)\ ,\ \sigma(H(\lambda;\theta))\ ) \leq \dfrac{\|(H(\lambda;\theta) - \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda))\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}$

$$= \frac{\|\widetilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\widetilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)})$$

ここで、$\widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) = v_1\lambda + o(\lambda)$ , $\mathcal{E}_1(\lambda;\theta) = v_1\lambda + o(\lambda)$ , $\mathcal{E}_2(\lambda;\theta) = v_2\lambda + o(\lambda)$

($v_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} < v_2$,　各error termは$\theta \in E^*$に関して一様)

を用いてTheorem Aの結論を得る。□

# 4 Outline of Proof of Theorem B

この章ではTheorem Bの証明の概略を述べる。§3で得た$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta)$の評価は$\theta \in E^*$に関し一様な評価であったが、bandの幅をより精密に評価するには、$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta)$の$\theta \in E^*$に依存する評価を得ることが必要である。この定理の証明にはW.K.B.解析が本質的な役割を果たす。

まず、準備として関数解析的な定義を述べる。一般に　H: Hilbert sp.
$E, F \subset H$ : closed subsp. とする。
$\Pi_F$ : $H \to F$; orthogonal projection onto F　とする。

$\overrightarrow{d}(E,F) := \sup_{x\in E\ ,\ \|x\|=1} dis(x,F) = \|(1-\Pi_F)|_E\|_H$ とおく。

*Proposition* 4.1([3] pp348-349)
A:self-adjoint operator in H
I$\subset$ **R**:compact interval
$\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_N \in H$;linearly independent
$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N \in I$,

$$A\psi_j = \mu_j\psi_j + r_j\ ,\ \|r_j\| \leq \varepsilon\ \ (j=1,2,\cdots,N)$$

I=$[\alpha,\beta]$ として$^\exists a > 0$ s.t. $\sigma(A)\cap[\alpha-2a,\alpha]=\emptyset$ ,$\sigma(A)\cap[\beta,\beta+2a]=\emptyset$
$E$ : $\psi_1,\cdots,\psi_N$ が張るsubspace,
$F$ : $\sigma(A)\cap I$ に対応するsubspaceとする。
このとき、次が成り立つ。

$$\overrightarrow{d}(E,F) \leq \frac{N^{\frac{1}{2}}\varepsilon}{a\sqrt{\lambda_s^{min}}},$$

ただし $\lambda_s^{min}$ は行列 $S=((\psi_j,\psi_k)_H)$ のsmallest eigenvalueである。

ここで、$\theta \in E^*$ に対し $E_\theta(\lambda) := \{k\widetilde{\psi}_\theta(\lambda)\ :\ k \in \mathbf{C}\}$ , $F_\theta(\lambda)$ を $H(\lambda;\theta)$ の固有値 $\mathcal{E}_1(\lambda;\theta)$ に対応する固有空間とする。§3の内容と、この命題を用いて次の補題を得る。

*Lemma* 4.2

$$\overrightarrow{d}(E_\theta(\lambda),F_\theta(\lambda)) = O(e^{-(s_0-2\eta)\lambda})\ \ (\lambda\to\infty)$$

error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

この補題とLemma 3.1 ,Lemma 3.2から次が得られる。

*Lemma* 4.3

$$\mathcal{E}_1(\lambda;\theta) = \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}_\gamma^B\widetilde{r},\widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + O(e^{-(2s_0-5\eta)\lambda})$$
$$(as\ \ \lambda\to\infty)$$

$s_0' := \min_{\gamma\in\Gamma\setminus(\Lambda\cup\{0\})} d_V(\gamma,0)\ \ (> s_0)$ とおいて、Lemma 3.2より

$$(4.1)\quad \mathcal{E}_1(\lambda;\theta) = \widetilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma\in\Lambda} e^{i\gamma\cdot\theta}(\mathbf{T}^B_\gamma \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \widetilde{O}(e^{-s_0'\lambda}) \quad (\lambda \to \infty)$$

を得る。(ただし$\widetilde{O}(e^{-s_0'\lambda})$とは$\forall\eta > 0$に対し、$O(e^{-(s_0'-\eta)\lambda})$という意味である)

(H.2)より　$\gamma \in \Lambda \Rightarrow -\gamma \in \Lambda$　である。

また直接的な計算により次が判る:

$$(4.2)\quad (\mathbf{T}^B_\gamma \widetilde{r}, \psi)_{L^2(\mathbf{R}^2)} = \overline{(\mathbf{T}^B_{-\gamma}\widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}} \quad \forall\gamma \in \Lambda$$

$\gamma \in \Lambda$, $a > 0$に対し

$E^{(a)}_\gamma := \{\, x \in \mathbf{R}^2 \ : \ d_V(0,x) + d_V(\gamma,x) \le s_0 + a\}$とおく。

$a > 0$ : 十分小　に対し、　$E^{(a)}_\gamma \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta) \cap B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$である。

$\Omega$ : open domain with smooth boundary を

$0 \notin \overline{\Omega}$, $\gamma \in \Omega$, $E^{(a)}_\gamma \cap \overline{\Omega} \subset B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$, $E^{(a)}_\gamma \cap \Omega^c \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$

を満たすように選ぶ。$\widetilde{\Gamma}_\gamma := \partial\Omega \cap E^{(a)}$とおく。$n = (n_1, n_2)$を$\partial\Omega$のouter unit normalとする。eigenfunctionのdecay estimateを用いて次の補題を得る。

<u>*Lemma* 4.4</u>

$$(4.3)\quad (\mathbf{T}^B_\gamma \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \{\phi\tfrac{\partial}{\partial n}(\overline{\mathbf{T}^B_{-\gamma}\widetilde{\phi}}) - (\overline{\mathbf{T}^B_{-\gamma}\widetilde{\phi}})\tfrac{\partial}{\partial n}\widetilde{\phi}\}\, dS$$
$$-2bi\int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \phi\overline{\mathbf{T}^B_{-\gamma}\widetilde{\phi}}(x_2 n_1 - x_1 n_2)\, dS \quad mod\ O(\lambda^{-\infty}e^{-s_0\lambda})$$

$(\mathbf{T}^B_\gamma \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}$を$mod\ O(\lambda^{-\infty}e^{-s_0\lambda})$で近似するために、$\widetilde{H}(\lambda)$の固有関数をW.K.B.解で近似する。以下、W.K.B.解について述べる。(cf.[3])

微分作用素　$H(\lambda) = (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x)\ in\ \mathbf{R}^2$

に対し

W.K.B.解　$(a_0(x) + a_1(x)\lambda^{-1} + a_2(x)\lambda^{-2} + \cdots)e^{-\lambda\varphi(x)}$を構成する。

$\varphi(x)$ : $\mathbf{R}$-valued $C^\infty$ function defined near 0 in $\mathbf{R}^2$,

$a_0(x), a_1(x), \cdots, a_N(x)$ : $\mathbf{C}$-valued $C^\infty$ function defined near 0 in $\mathbf{R}^2$,

$e_1, e_2, \cdots, e_{N+1} \in \mathbf{C}$に対し、

$a(x) := \sum_{j=0}^{N} a_j(x)\lambda^{-j}, E(\lambda) := \sum_{k=1}^{N+1} e_k\lambda^{2-k}, L := x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}$とおいて、

次の等式を得る:

$$(4.4) e^{\lambda\varphi}(H(\lambda)-E(\lambda))(\sum_{j=0}^{N} a_j(x)\lambda^{-j}e^{-\lambda\varphi})$$
$$= \lambda^2(V-|\nabla\varphi|^2)a + \lambda(2\nabla\varphi\cdot\nabla a_0 + (\triangle\varphi)a_0 + 2bi(L\varphi)a_0 - e_1 a_0)$$
$$+ \sum_{l=0}^{l=N-1} \{2\nabla\varphi\cdot\nabla a_{l+1} + (\triangle\varphi)a_{l+1} + 2bi(L\varphi)a_{l+1} - xbiLa_l + b^2|x|^2 a_l$$
$$-\triangle a_l - \sum_{\substack{j+k=l+2\\ j\geq 0, k\geq 1}} e_k a_j\}\lambda^{-l}$$
$$+\lambda^{-N}(-2biLa_N + b^2|x|^2 a_N - \triangle a_N) - \sum_{l=N}^{2N-2}\lambda^{-l}\sum_{\substack{j+k=l+2\\ j\geq 0, k\geq 1}} e_k a_j$$

そこで、原点の近傍で次の方程式を考える:

$$\begin{cases} (4.5)\ \ V-|\nabla\varphi|^2 = 0 \\ (4.6)\ \ 2\nabla\varphi\cdot\nabla a_0 + (\triangle\varphi)a_0 + 2bi(L\varphi)a_0 - e_1 a_0 = 0 \\ (4.7)_l\ \ 2\nabla\varphi\cdot\nabla a_{l+1} + (\triangle\varphi)a_{l+1} + 2bi(L\varphi)a_{l+1} - 2biLa_l - \triangle a_l \\ \qquad - \sum_{\substack{j+k=l+2\\ j\geq 0, k\geq 1}} e_k a_j = 0 \end{cases}$$
$$(0 \leq l \leq N-1)$$

(4.5)をeikonal equation、(4.6)をfirst transport equation、
$(4.7)_l$を(l+2)-th transport equation と言う。

これらを解けば、(4.4)は原点の近傍で$O(\lambda^{-N})$ (as $\lambda\to\infty$)となり、W.K.B.解が構成できる。

まず、eikonal equationについて説明する。

$\varepsilon \geq 0$ :十分小に対し

$\Omega_\varepsilon$ :=the set consists of $\{0\}$ and the union of the interiors of all minimal geodesics from 0 to some point in $\mathbf{R}^2$,of length strictly less than $s_0-\varepsilon$.

とおく。

ただし、geodesicは次を満たすものだけを考える。

$$\begin{cases} \gamma:[0,a]\to\mathbf{R}^2;\text{piecewise smooth curve,} \\ \gamma(t)\notin\Gamma\quad \forall t\in(0,a] \\ \gamma(t)\to 0\ \ (as\ t\to +0) \\ \gamma|_{(0,a]}\text{は}\quad \mathbf{R}^2\backslash\Gamma\ with\ Vdx^2\quad \text{のgeodesicである} \end{cases}$$

$\Omega_0$はopen setである。$d(x) := d_V(x,0)$とおいて、次が成り立つ:

$$d(x) \in C^\infty(\Omega_0), \quad |\nabla d(x)|^2 = V(x) \; in \; \Omega_0$$

すなわち、$d(x)$はeikonal equation (4.5)の解である。

次にtransport equationについて説明する。

$$\begin{aligned} X &:= 2\nabla d \cdot \nabla \\ &= 2\left(\frac{\partial d(x)}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial d(x)}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \quad \text{in} \quad \Omega_0 \text{とおく。} \end{aligned}$$

このとき、次の補題が成り立つ。

<u>*Lemma* 4.5</u> $a(x), b(x)$ : $\mathbf{C}$-valued $C^\infty$ *function in* $\Omega_0$,
$a(0) = b(0) = 0$ とする。このとき、
${}^\forall\gamma \in \mathbf{C}$に対し、初期値問題

$$\begin{cases} Xu = au + b \; in \; \Omega_0 \\ u(0) = \gamma \end{cases}$$

の解は存在して一意である。

まず、first transport equation (4.6)を考える。
(4.6)は $2\nabla\varphi \cdot \nabla a_0 + (\triangle\varphi + 2biL\varphi - e_1)a_0 = 0$と書ける。

$$\begin{aligned} e_1 &= (\triangle\varphi)(0) + 2bi(L\varphi)(0) \\ &= (\triangle\varphi)(0) \text{とおく。} \end{aligned}$$

Lemma4.5より(4.6)は初期条件 $a_0(0) = 1$の下で、$\Omega_0$で定義された解をもつ。

次に$(4.7)_0$を考える。
$(4.7)_0$は $2\nabla\varphi \cdot \nabla a_1 + (\triangle\varphi + 2biL\varphi - e_1)a_1 = 2biLa_0 + \triangle a_0 + e_2 a_0$
と表わされる。

$$\begin{aligned} e_2 &= -\frac{1}{a_0(0)}(2bi(La_0)(0) + (\triangle a_0)(0)) \\ &= -(\triangle a_0)(0) \text{とおく。} \end{aligned}$$

Lemma4.5 より$(4.7)_0$は初期条件$a_1(0) = 0$の下で、$\Omega_0$で定義された解を持つ。

以下inductiveに$(4.7)_l$ $(l = 1, 2, \cdots)$は、$e_{l+2} = -(\triangle a_l)(0)$とおけば
初期条件$a_{l+1}(0) = 0$の下で、$\Omega_0$で定義された解をもつ。

以上より次の補題を得る。

<u>*Lemma* 4.6</u> $^\exists e_1, e_2, \cdots \in \mathbf{R}$ $(e_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})$

$^\exists \mathcal{E}(\lambda) \sim e_1\lambda + e_2 + e_3\lambda^{-1} + \cdots$ $(\lambda \to \infty)$

$^\exists$ $a_0(x)$ , $a_1(x) \cdots$ : **C**-valued $C^\infty$ function in $\Omega_0$

with $a_0(x) \neq 0$ *in* $\Omega_0$ , $a_0(0) = 1$ , $a_j(0) = 0$ $(j \geq 1)$

$^\exists a(x,\lambda)$ :**C**-valued $C^\infty$ function of $x$ in $\Omega_\varepsilon$

s.t. $a(x,\lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\lambda^{-j}$

$, (H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}$ *in* $\Omega_\varepsilon$

where $\theta(\lambda) := \lambda^{\frac{1}{2}} a(x,\lambda)e^{-\lambda d(x)}$

$$\Big( i.e.\ \max_{|\alpha|\leq 2}\sup_{x\in\Omega_\varepsilon} |\partial_x^\alpha(a(x,\lambda) - \sum_{j=0}^{N} a_j\lambda^{-j}| = O(\lambda^{-(N+1)})\ \ \forall N \in \mathbf{N},$$

$$\sup_{x\in\Omega_\varepsilon} |e^{\lambda d(x)}(H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda)| = O(\lambda^{-\infty}) \Big)$$

$\varepsilon > 0$を固定する。$\|\theta(\lambda)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$ とnormalizeしておく。
$K \subset \Omega_\varepsilon$ : compact とする。$\eta > 0$を十分小さく取って、$\Omega_\varepsilon \subset B_V(0, s_0 - \eta)$とする。
$\widehat{K}$をKの点と$\{0\}$とを結ぶminimal geodesic 全体のなす集合とする。$\widehat{K} \subset \Omega_\varepsilon$である。
$\widetilde{\Omega}$ : $\widehat{K}$の開近傍を$\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega_\varepsilon$となるように選ぶ。
$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$を、$\chi = 1$ *in nbd. of* $\widehat{K}$, *supp*$\chi \subset \widetilde{\Omega}$を満たすように選ぶ。

Proposition 4.1を用いて、$|(\chi\theta(\lambda), \widetilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)}| = 1 + O(\lambda^{-\infty})$を得る。
このことから、十分大きい$\lambda$に対して、$\widetilde{\phi}(\lambda)$は $(\chi\theta(\lambda), \widetilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)} > 0$を満たすとしてよい。
$\omega(\lambda) = \chi(\widetilde{\phi}(\lambda) - \theta(\lambda))$とおく。

<u>*Lemma* 4.7</u> $\widetilde{K}$ : *nbd. of* $\widehat{K}$が存在して $(\widetilde{K} \subset\subset \widetilde{\Omega})$
$\omega = O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}$ *in* $H^2(\widetilde{K})$が成り立つ。

この補題と(4.3)より$^\forall\gamma \in \Lambda$に対し、

$$(4.8)\quad (\mathbf{T}_\gamma^B\widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \{\theta\frac{\partial}{\partial n}\overline{(\mathbf{T}_{-\gamma}^B\theta)} - \overline{(\mathbf{T}_{-\gamma}^B\theta)}\frac{\partial}{\partial n}\theta\}\, dS$$
$$-2bi\int_{\widetilde{\Gamma}_{-\gamma}} \theta\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B\theta}(x_2n_1 - x_1n_2)\, dS \ \ mod\, O(\lambda^{-\infty}e^{-s_0\lambda})$$

を得る。仮定 (H.7) , (H.8) とMorse lemmaを用いて、

(4.9) $(\mathbf{T}_\gamma^B \widetilde{r}, \widetilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} = (\widetilde{b_\gamma}\lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}))e^{-s_0\lambda}$ $(\lambda \to \infty)$ $,\gamma \in \Lambda$
with $\widetilde{b_\gamma} \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$
を得る。 $\theta \in E^*$に対し$f(\theta) := \sum_{\gamma\in\Lambda} e^{i\gamma\cdot\theta}\widetilde{b_\gamma}$とおく。
(4.2),(4.9)より$^\forall\gamma \in \Lambda$に対し$\widetilde{b_\gamma} = \overline{\widetilde{b_{-\gamma}}}$である。
$b_0 := \max_{\theta\in E^*} f(\theta) - \min_{\theta\in E^*} f(\theta)$とおいて、(4.1),(4.9)より

(4.10) length of $\mathcal{E}_1(\lambda; E^*) = (b_0\lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}))e^{-s_0\lambda}$ $(as\ \lambda \to \infty)$
を得る。

最後に$b_0 > 0$を示す。
$\gamma \in \Lambda$に対し、$\widetilde{b_\gamma} = \int_{E^*} f(\theta)e^{-i\gamma\cdot\theta}d\theta$より　$f(\theta) \equiv const.\ on\ E^*$ならば、
$\widetilde{b}_\gamma = 0$となり(4.9)に矛盾する。よって$f(\theta)$は$\theta \in E^*$に関し定数ではない。
したがって、$b_0 > 0$である。□

## <u>Appendix</u>　Eigenvalues and eigenfunctions of $H_0(\lambda)$

ここでは、第２章の$H_0(\lambda)$の固有値と固有関数の計算について述べる。この計算にはWeyl擬微分作用素を用いる。まず、Weyl擬微分作用素について簡単に説明する。(cf.[4])

$m \in \mathbf{R}$に対し　Symbol class $S^m$を

$$S^m := \{\ a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi) : \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |\xi|)^{m-|\alpha|-|\beta|}\ \ \forall\alpha,\beta \in \mathbf{N}^n\}$$

と定義する。

$a(x,\xi) \in S^m$に対しWeyl擬微分作用素$a^w(x,D_x)$を

$$(a^w(x,D_x)u)(x) := (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(\tfrac{x+y}{2},\xi)u(y)dyd\xi \quad u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

で定義する。$a^w(x,D_x)$は$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$から$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$へのcontinuous linear operatorである。この擬微分作用素に対し、composition formura や$L^2$-boundedness theorem等が成り立つ(cf.[4])。ここでは、後で必要なWeyl擬微分作用素の正準変換による不変性を述べる(cf.[5])。

$(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, (y,\eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$に対し、
　$\sigma(x,\xi;y,\eta) := \xi \cdot y - x \cdot \eta$と定義する。
$\chi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; linearが
　$\sigma(\chi X;\chi Y) = \sigma(X;Y)\ {}^\forall X, Y \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$
をみたすとき、$\chi$を正準変換という。

<u>*Theorem*</u>　$a \in S^m$ , $\chi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$;正準変換　に対し
　$\exists U : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$: isomorphism かつ $U : L^2(\mathbf{R}^2) \to L^2(\mathbf{R}^2)$;unitary
　s.t.　$U^{-1} a^w(x, D_x) U = (a \circ \chi)^w(x, D_x)$ *on* $\mathcal{S}$

<u>*ex.1*</u>　$\chi : \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$を$x_j$を$\xi_j$に、$\xi_j$を$-x_j$に置き換え、
他の座標は変えないmapとする。$\chi$は正準変換である。
Uを$x_j$に関するFourier変換とする。このとき、Uは$L^2(\mathbf{R}^2)$のunitary op.で
$U^{-1} a^w(x, D_x) U = (a \circ \chi)^w(x, D_x)$ *on* $\mathcal{S}$　が成り立つ。

<u>*ex.2*</u>　T : n×n実行列 , det T≠0 とする。
$\chi(x,\xi) = (Tx, {}^tT^{-1}\xi)$ , $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$　とおく。
$\chi$は正準変換である。
$f \in L^2(\mathbf{R}^2)$に対し$(Uf)(x) = |detT|^{-\frac{1}{2}} f(T^{-1}x)$とおく。
Uは$L^2(\mathbf{R}^2)$のunitary op.で
$U^{-1} a^w(x, D_x) U = (a \circ \chi)^w(x, D_x)$ *on* $\mathcal{S}$がなりたつ。

次に$H_0(\lambda)$の固有値と固有関数の具体的な計算について述べる。
$x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$に対し、
$p(x,\xi) := (\xi_1 + bx_2)^2 + (\xi_2 - bx_1)^2 + \lambda^2(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2)$　とおく。

(A.1)　$H_0(\lambda) = p^w(x, D_x)$　である。

$U_1$を$x_1$に関するFourier変換とし、$p_1(x,\xi)$を$p(x,\xi)$で$\xi_1$を$-x_1$に、$x_1$を$\xi_1$に置き換えたもの、すなわち、
$$p_1(x,\xi) := (-x_1 + bx_2)^2 + (\xi_2 - b\xi_1)^2 + \lambda^2(\mu_1 \xi_1^2 + \mu_2 x_2^2)$$
$$= \lambda^2 \mu_1 \xi_1^2 + (\xi_2 - b\xi_1)^2 + (-x_1 + bx_2)^2 + \lambda^2 \mu_2 x_2^2$$
とおく。ex.1より

(*A*.2)　$p(x, D_x) = U_1 p_1^w(x, D_x) U_1^{-1}$　が成り立つ。

$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1}\lambda & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とおき

$$p_2(x,\xi) := p_1(Tx, {}^tT^{-1}\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} \mu_1\lambda^2 & -2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ -2b\sqrt{\mu_1}\lambda & 4b^2 + \lambda^2\mu_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおく。

$U_2 : L^2(\mathbf{R}^2) \to L^2(\mathbf{R}^2)$; unitaryを

$(U_2 f)(x) = \mu_1^{-\frac{1}{4}}\lambda^{-\frac{1}{2}} f(T^{-1}x)$で定義する。ex.2より

(A.3) $p_1^w(x, D_x) = U_2 p_2^w(x, D_x) U_2^{-1}$が成り立つ。

次に、行列 $\begin{pmatrix} \mu_1\lambda^2 & -2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ -2b\sqrt{\mu_1}\lambda & \mu_2\lambda^2 + 4b^2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化する

$m_1(\lambda), m_2(\lambda)$(ただし$m_1(\lambda) < m_2(\lambda)$)をこの行列の固有方程式

$t^2 - (\lambda^2(\mu_1 + \mu_2) + 4b^2)t + \lambda^4\mu_1\mu_2 = 0$の解とする。

$$a_1(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda^2\mu_2 + 4b^2 - m_1(\lambda) \\ 2b\sqrt{\mu_1}\lambda \end{pmatrix} \times \{(\lambda^2\mu_2 + 4b^2 - m_1(\lambda))^2 + 4b^2\mu_1\lambda^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_2(\lambda) := \begin{pmatrix} 2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ \mu_1\lambda^2 - m_2(\lambda) \end{pmatrix} \times \{(\mu_1\lambda^2 - m_2(\lambda))^2 + 4b^2\lambda^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

$A(\lambda) := (a_1(\lambda), a_2(\lambda))$とおく。$A(\lambda)$は直交行列で

$${}^tA(\lambda)\begin{pmatrix} \mu_1\lambda^2 & -2b\sqrt{\mu_1}\lambda \\ -2b\sqrt{\mu_1}\lambda & \lambda^2\mu_2 + 4b^2 \end{pmatrix} A(\lambda) = \begin{pmatrix} m_1(\lambda) & 0 \\ 0 & m_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

$$p_3(x,\xi) := p_2(A(\lambda)x, a(\lambda)\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2$$ とおく。

$U_3 : L^2(\mathbf{R}^2) \to L^2(\mathbf{R}^2)$; unitary を$(U_3 f)(x) := f({}^tA(\lambda)x)$で定義する。ex.2より

(A.4) $p_2^w(x, D_x) = U_3 p_3^w(x, D_x) U_3^{-1}$となる。

$p_3^w(x, D_x) = -\triangle + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2$である。

$U = U_1U_2U_3$とおく。Uは$L^2(\mathbf{R}^2)$のunitary operator である。

(A.1)〜(A.4)より、次が成り立つ。

(A.5) $H_0(\lambda) = U(-\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2\ )U^{-1}$

すなわち $H_0(\lambda)$はHarmonic Oscillator
$-\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2$ in $L^2(\mathbf{R}^2)$
とunitary 同値である。

$-\Delta + m_1(\lambda)x_1^2 + m_2(\lambda)x_2^2$ in $L^2(\mathbf{R}^2)$の固有値は
$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$ (j,k≥0,integers)で、
対応する固有関数は
$w_{j,k} := m_1(\lambda)^{\frac{1}{8}} m_2(\lambda)^{\frac{1}{8}} Q_j(m_1(\lambda)^{\frac{1}{4}}x_1)Q_k(m_2(\lambda)^{\frac{1}{4}}x_2)$
$\times exp(-\frac{1}{2}m_1(\lambda)^{\frac{1}{2}}x_1^2 - \frac{1}{2}m_2(\lambda)^{\frac{1}{2}}x_2^2)$
(ただし$Q_j$はj次のHermite多項式)
である。$\{w_{j,k}(\lambda;x)\}_{j,k\geq 0}$は$L^2(\mathbf{R}^2)$の完全正規直交系である。

したがって$H_0(\lambda)$の固有値は $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$ (j,k≥0;integers)で、対応する固有関数は$(Uw_{j,k})(\lambda;x)$である。$Uw_{j,k}$は具体的に計算でき、(2.5)の評価を得る。

# References


[1] B. Simon : *Semiclassical Analysis of Low-Lying Eigenvalues III. Width of the Ground State Band in Strongly Coupled Solids,* Anal. Phys. ,158 (1984),415-420.

[2] A. Outassourt: *Comportement semi-classique pour l'opérateurs de Schrödinger à potentiel périodique,* J. Funct. Anal. 72 (1987) 65-93.

[3] B. Helffer-J. Sjöstrand : *Multiple wells in the semi-classisal limit I,* Comm. in P.D.E. , 9(4), (1984) 337-408.

[4] A. Voros: *An Algebra of Pseudodifferential Operators and the Asymptotics of Quantum Mechanics,* J. Funct. Anal. 29 (1978) 104-132.

[5] L. Hörmander : *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III* , Springer-Verlag