数理解析研究所講究録
905巻 1995年 57-67

Neumann-Wigner 型ポテンシャルについて

内山　淳（京都工芸繊維大学　繊維学部）(Jun　Uchiyama)
荒井 正治（立命館大学　理工学部）(Masaharu　Arai　)

$$\begin{cases} -\Delta\psi(x) + q(x)\psi(x) = \lambda\psi(x) \qquad in \quad \mathbf{R}^n, \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

という固有値問題を考える．ここで Δ は $\mathbf{R}^n$ の Laplacian である．また

$q(x)$ は $\mathbf{R}^n$ で有界な実数値関数で

$$\lim_{|x|\to\infty} q(x) = 0$$

とする．

$$Dom(H) = H^2(\mathbf{R}^n), \qquad H = -\Delta + q(x)$$

とすると

H は $L^2(\mathbf{R}^n)$ で自己共役作用素で $\sigma_{ess}(H) = [0,\infty)$

である．essential spectrum と continuous spectrum を同一視すると上記の問題は

continuous spectrum に埋め込まれた固有値を考える

ということである．これに関して Neumann-Wigner [12] (および Simon による修正) は次の結果を与えた．

$$q_{NW}(x) = \frac{-32\sin r}{\{1+g(r)^2\}^2} \cdot \left[g^3\cos r - 3g^2\sin^3 r + g\cos r + \sin^3 r\right],$$

$$g(r) = 2r - \sin 2r,$$

$$\psi_{NW}(x) = \frac{\sin r}{r\left\{1+g(r)^2\right\}},$$

$$\lambda = 1 > 0, \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad r = |x|$$

は上記の問題を満たす．ここで

$$q_{NW}(x) = -8\,\frac{\sin 2r}{r} + \mathrm{O}\left(r^{-2}\right) \qquad as \quad r \to \infty,$$

$$|\psi_{NW}(x)| \le \frac{Const}{1+r^3} \in L^2(\mathbf{R}^3)$$

であることに注目する．

そこで次の問題を考えることにする．

問題

$$H = -\Delta + q(x) \qquad in \quad L^2(\mathbf{R}^n)$$

において，$q(x)$ は次の 2 条件を満たすとする．

(Q.1)　$q(x)$ は $\mathbf{R}^n$ で連続な実数値関数，

(Q.2)　$q(x) = -k\,\dfrac{\sin 2r}{r} + \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right) \qquad as \quad r \to \infty \quad (\varepsilon_0 > 0).$

ここで k は実定数である．このとき $\lambda > 0$ は H の固有値であるか？

これに対する答を次の形で用意しておく．

定義

$$\text{“}yes\text{”} \Longleftrightarrow \exists q(x)\ satisfying\ (\mathrm{Q}.1),\ (\mathrm{Q}.2)\ s.t.\ \lambda \in \sigma_p(H).$$

"no" $\Longleftrightarrow \forall q(x)\ satisfying$ (Q.1), (Q.2) に対して $\lambda \notin \sigma_p(H)$.

ここで $\sigma_p(H)$ は H の固有値の全体を表す．上の定義において“ある...が存在して”および“全ての...に対して”は (Q.2) における補正項 $O(r^{-1-\varepsilon_0})$ に関係している．上述の例により次を得る．

定理 1. (Neumann-Wigner [12]) (Simon による修正)

$$n=3,\ k=8,\ \lambda=1 \Longrightarrow \text{“}yes\text{”}.$$

また次のことが知られている．

定理 2. (Moses-Tuan [10]) (Albeverio による修正)

$$n=3,\ k=4,\ \lambda=1 \Longrightarrow \text{“}yes\text{”}.$$

定理 3. (essentially due to Atkinson [5]) n=1 とすると

(1) $\forall k,\ \lambda \neq 1,\ \lambda > 0 \Longrightarrow$ “no”.

(2) $|k| \leq 2,\ \lambda = 1 \Longrightarrow$ “no”.

(3) $|k| > 2,\ \lambda = 1 \Longrightarrow$ “yes”.

Atkinson の論文においては上記の結果は explicit には与えられていない．また (2), (3) の結果を得るためには Atkinson の与えた定理を少し修正して適用しなければならない．ところで正の固有値の存在に関しては次の結果を得た．

定理 4.(Arai-Uchiyama [4])

$$\forall n,\ |k| > 2,\ \lambda = 1 \Longrightarrow \text{“}yes\text{”}.$$

次に正の固有値の非存在について考える．

$$V(r) = \frac{\sin 2r}{r} \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad r = |x|$$

とおいたとき

$$\limsup_{r\to\infty} r\partial_r V(r) = 2,$$

$$\limsup_{r\to\infty} |rV(r)| = 1,$$

$$\limsup_{r\to\infty} \int_1^r tV(t)dt - \liminf_{r\to\infty} \int_1^r tV(t)dt = 1$$

である．その値が 0 でない有限値であるという意味で上記の $V(r)$ はこの 3 つの値を考えるとき critical な例になっている．(0 になるときは small perturbation であると考えられる．) そこで次の 5 つの仮定を満たす H を考える．

$$H = -\Delta + q(x) \qquad in \quad L^2(\mathbf{R}^n),$$

$$q(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(r), \qquad Q(r) = \int_1^r tV_3(t)dt,$$

(1) $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(r)$ は $\mathbf{R}^n$ で実数値関数かつ有界,

(2) $\limsup_{r\to\infty} V_1(x) = 0$,

(3) $L := \limsup_{r\to\infty} r\partial_r V_1(x) < \infty$,

(4) $K := \limsup_{r\to\infty} |rV_2(x)| < \infty$,

(5) $M := \limsup_{r\to\infty} Q(r) - \liminf_{r\to\infty} Q(r) < \infty$.

(注意：$L \geq 0$ となる．) この H に対して次のような性質を持つ $\Lambda \geq 0$ を求めることを考える．

$$\lambda > \Lambda \Longrightarrow \lambda \notin \sigma_p(H).$$

この Λ に関してはいくつかの結果がある.

Kato [8] : $V_1(x) \equiv V_3(r) \equiv 0 \Longrightarrow \Lambda_K = K^2$,

Agmon [1] : $V_3(r) \equiv 0,\ K = 0 \Longrightarrow \Lambda_A = \dfrac{L}{2}$,

Eastham-Kalf [6] : $V_3(r) \equiv 0 \Longrightarrow$

$$\Lambda_{EK} = \frac{1}{2}\left\{K^2 + L + \sqrt{K^2(K^2 + 2L)}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\left(K + \sqrt{K^2 + 2L}\right)\right\}^2,$$

Khosrovshahi-Levine-Payne [9] : $M < \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$

$$\Lambda_{KLP} = \max\left\{\left[\frac{K + \sqrt{K^2 + 2L(1-2M)}}{2(1-2M)}\right]^2, \frac{2K^2 + L(1-4M)}{2(1-4M)^2}\right\},$$

Kalf-Kummar [7] : $M < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow$

$$\Lambda_{KK} = \left[\frac{K + \sqrt{K^2 + 2L(1-2M)}}{2(1-2M)}\right]^2,$$

Arai-Uchiyama [3] : $M < 1 \Longrightarrow$

$$\Lambda_{AU} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-M^2}\left[K^2 + L + \sqrt{K^2(K^2 + 2L) + L^2M^2}\right].$$

これらに関して次のことが分かる.

- Λ_{EK} において $L = 0$ または $K = 0$ とおくことによって Λ_K または Λ_A を得るから Λ_{EK} は Λ_K および Λ_A の拡張になっている.
- Λ_{KLP}, Λ_{KK}, Λ_{AU} において $M = 0$ とおくことによって Λ_{EK} を得るから Λ_{KLP}, Λ_{KK}, Λ_{AU} は Λ_{EK} の拡張になっている.
- $\Lambda_{KLP} \geq \Lambda_{KK} \geq \Lambda_{AU}$ が成り立つ.

その性質上 Λ はより小さいほうがより良い結果を与える．即ち Λ_{AU} を適用した場合が一番良い結果が得られる．その差がどれくらいあるかを次のように調べる．

$q(x)$ は (Q.1), (Q.2) を満たすとする．

$$V_1(x) = -(k+s+t)\,\frac{\sin 2r}{r},$$

$$V_2(x) = s\,\frac{\sin 2r}{r} + \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right),$$

$$V_3(r) = t\,\frac{\sin 2r}{r} \qquad (-\infty < s,\ t < \infty \quad : \ \textit{real constants})$$

とおくと

$$q(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(r)$$

となる．すると

$$L = 2|k+s+t|,\ K = |s|,\ M = |t|$$

である．これらを代入して得られる Λ を $\Lambda(s,t)$ と表す．(各 Λ によって相異なる許容範囲で) s, t を動かして $\Lambda(s,t)$ の最小値を求めることを考える．

$$\inf\{\,\Lambda_K(s,t)\,|\,s=-k,\ t=0\,\} = k^2,$$

$$\inf\{\,\Lambda_A(s,t)\,|\,s=0,\ t=0\,\} = |k|,$$

$$\inf\{\,\Lambda_{EK}(s,t)\,|\,-\infty < s < \infty,\ t=0\,\} = \min\{k^2, |k|\},$$

$$\inf\{\, \Lambda_{KLP}(s,t) \mid -\infty < s < \infty,\ |t| < \frac{1}{4} \}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{if} \quad |k| < \dfrac{1}{4}, \\ \min\{k^2, |k|\}, & \text{if} \quad |k| \geq \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

$$\inf\{\, \Lambda_{KK}(s,t) \mid -\infty < s < \infty,\ |t| < \frac{1}{2} \}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{if} \quad |k| < \dfrac{1}{2}, \\ \min\{k^2, |k|\}, & \text{if} \quad |k| \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\inf\{\, \Lambda_{AU}(s,t) \mid -\infty < s < \infty,\ |t| < 1 \}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{if} \quad |k| < 1, \\ \min\{k^2 - 1, |k|\}, & \text{if} \quad |k| \geq 1. \end{cases}$$

最小値 k^2 を与えるような $q(x)$ の分解は

$$V_1 \equiv V_3 \equiv 0,\ V_2 = -k\,\frac{\sin 2r}{r} + \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right)$$

である．最小値 $|k|$ を与えるような分解は

$$V_1 = -k\,\frac{\sin 2r}{r},\ V_3 \equiv 0,\ V_2 = \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right)$$

である．最小値 0 を与えるような分解は

$$V_1 \equiv 0,\ V_2 = \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right),\ V_3 = -k\,\frac{\sin 2r}{r}$$

である．これらはいずれも，K, L, M を無理やり相互干渉させようとしても Λ が最小値を取るという最適な状態では，相互干渉していないことを示す．しかし Λ_{AU} のみに現れる最小値 $k^2 - 1$ を与えるような分解はこれらとは異なり

$$V_1 \equiv 0,\ V_2 = \left\{\frac{1}{k} - k\right\}\frac{\sin 2r}{r} + \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right),\ V_3 = -\frac{1}{k}\cdot\frac{\sin 2r}{r}$$

であり，K と M の間で相互干渉を起こしている．

次に Λ_{AU} を導いた定理を適用して最適化することを考える．これは

$$\text{Uchiyama [11]} \quad : \lambda > \frac{1}{2}\left(\sqrt{4k^2+1} - 1\right) \Longrightarrow \text{“}no\text{”}$$

を導いたときと同じ考え方である．

命題 A. (Arai-Uchiyama [2])

$$(-\Delta + q_1(x) + q_2(x))\,\psi(x) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbf{R}^n,$$

$$q_1(x),\ q_2(x) \quad : \quad \textit{bounded, real-valued},$$

$$\exists\sigma(r),\ \exists\eta(r) \quad : \quad \textit{real-valued},$$

$$\exists\delta > 0,\ \exists\tau > 0 \quad : \quad \textit{constants s.t.}$$

(1) $\sigma(r) \geq \delta \quad for\ \forall x \in \mathbf{R}^n$,

(2) $\eta(r) \leq 2, \quad$ *bounded*,

(3) $\displaystyle\limsup_{r\to\infty}\left[r\partial_r q_1 + \eta(r)q_1 + \sigma(r)^{-1}\left|rq_2 - Q'(r)\right|^2\right] < 0,$

$$Q(r) = \frac{1}{4}(\eta(r) - \sigma(r)),$$

(4) $rq_2(x) - Q'(r) \quad : \quad$ *bounded*,

(5) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\exp\left(\int_1^r \frac{\tau - \eta(t)}{t}dt\right) = 0,$

(6) $\displaystyle\exp\left(-\int_1^r \frac{\sigma(t) + \eta(t)}{2t}\,dt\right) \notin L^1(1,\infty),$

$\Longrightarrow$

$\psi \not\equiv 0$ とすると $\psi \notin L^2(\mathbf{R}^n)$.

これに対して次を得る.

命題 B.(Arai-Uchiyama [4]) $\lambda > 0$ および実定数 k が与えられているとする. このとき,

$\exists s,\ \exists u,\ \exists v,\ \exists \sigma_0,\ \exists \eta_0 \quad : \quad$ *real constants s.t.*

$$q_1(x) = -(k+s)\frac{\sin 2r}{r} - \lambda,$$

$$q_2(x) = s\frac{\sin 2r}{r} + \mathrm{O}\left(r^{-1-\varepsilon_0}\right),$$

$$\sigma(r) = \sigma_0 + 2u\cos 2r,$$

$$\eta(r) = \eta_0 + 2v\cos 2r$$

が命題 A の仮定を満たす.

$\Longleftrightarrow$

$\exists s,\ \exists u,\ \exists v,\ \exists \sigma_0,\ \exists \eta_0 \quad : \quad$ *real constants s.t.*

$$\sigma_0 + \eta_0 \le 2,\ \eta_0 > 0,\ 2|u| < \sigma_0,\ \eta_0 + 2|v| \le 2,$$

$$f(X) > 0 \qquad for \quad \forall X \in [-1,1],$$

ここで

$$f(X) = \left\{(s-u+v)^2 + 4u(k+s+v\lambda)\right\}X^2$$
$$+2\left\{(k+s+v\lambda)\sigma_0 + u\eta_0\lambda\right\}X + \sigma_0\eta_0\lambda - (s-u+v)^2$$

$\Longleftrightarrow$

$$|k| < \begin{cases} \lambda + \sqrt{\lambda} & : \quad \lambda \geq 1, \\ 1 + \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1} & : \quad 1 > \lambda > 0. \end{cases}$$

上記の q_1, q_2 に対しては

$$q_1 + q_2 = q - \lambda$$

が成り立つことに注意する．命題 A および命題 B より次を得る．

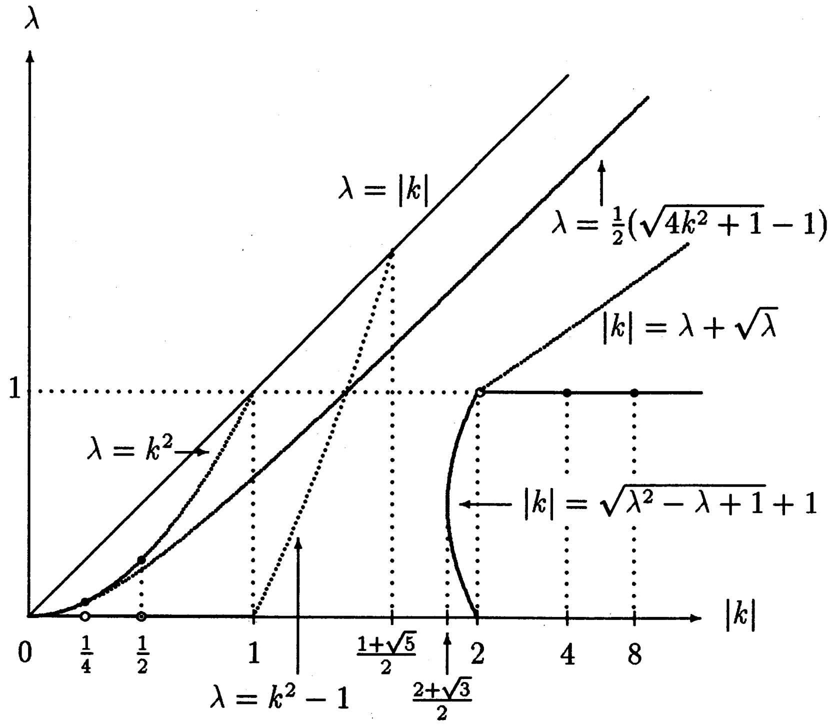
定理 5.(Arai-Uchiyama [4])

$$|k| < \begin{cases} \lambda + \sqrt{\lambda} & : \quad \lambda \geq 1, \\ 1 + \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1} & : \quad 1 > \lambda > 0. \end{cases} \Longrightarrow \text{“}no\text{”}.$$

系 6.(Arai-Uchiyama [4])

$$|k| < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \lambda > 0 \Longrightarrow \text{“}no\text{”}.$$

以上の結果より次の表を得る．



参考文献

[1] S. Agmon. Lower bounds for solutions of Schrödinger equations. *J. Analyse Math.*, **23**(1970),1–25.

[2] M. Arai and J. Uchiyama. Growth order of eigenfunctions of Schrödinger operators with potentials admitting some integral conditions I — General theory —. *in preparation*

[3] M. Arai and J. Uchiyama. Growth order of eigenfunctions of Schrödinger operators with potentials admitting some integral conditions II — Applications —. *in preparation*

[4] M. Arai and J. Uchiyama. On the von Neumann and Wigner potentials. *in preparation*

[5] F.V. Atkinson. The asymptotic solution of second-order differential equations. *Ann. Math. Pura Appl.*, **37**(1954), 347–378.

[6] M. S. P. Eastham and H. Kalf. *Schrödinger-type operators with continuous spectra.* Research Notes in Mathematics 65, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1982.

[7] H. Kalf and V. K. Kumar. On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with long range potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275**(1983), 215–229.

[8] T. Kato. Growth properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**(1959), 403–425.

[9] G. B. Khosrovshahi, H. A. Levine and L. E. Payne. On the positive spectrum of Schrödinger operators with long range potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **253**(1979), 211–228.

[10] H.E. Moses and S.E. Tuan. Potentials with zero scattering phase. *Nuovo Cimento* **13**(1959), 197–206.

[11] J. Uchiyama. Polinomial growth or decay of eigenfunctions of second-order elliptic operators. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **23**(1987), 975–1006.

[12] J. von Neumann and E. P. Wigner. Über merkwürdige diskrete eigenwerte. *Phys. Z.*, **30**(1929), 465–467.